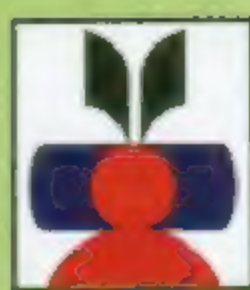


الرياضيات

والأنحليل العددي



د. صفاء علي ناصر



اليازوري

الرياضيات
والنحليل العددي

الرياضيات
والتحليل العددي
د. صفاء علي ناصر



ALL RIGHTS RESERVED

جميع الحقوق محفوظة

الطبعة العربية الثانية - ٢٠١٥

رقم الإيداع 2014/3/1219

التدقيق اللغوي : ياسر سلامة
التحرير : هيئة تحرير
تصميم الغلاف : نضال جمهور
الصف والإخراج : أسى جرادات
المطبعة : مطبعة برجى - بيروت

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو أي جزء منه أو تخزينه في نطاق إستعادة المعلومات
أو نقله بأي شكل من الأشكال دون إذن خطي مسبق من الناشر.

عمان - الأردن

All rights reserved. No part of this book may be reproduced, stored in a retrieval
system or transmitted in any form or by any means without prior permission in
writing of the publisher.

Amman - Jordan

الرياضيات



دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع

عمان - وسط البلد - شارع الملك حسين

هاتف: +962 6 4626626 تليفاكس: +962 6 4614158

ص.ب: 520646 الرمز البريدي: 11152

info@yazori.com www.yazori.com

الرياضيات والتحليل العددي

د. صفاء علي ناصر



المقدمة

تعد الرياضيات من العلوم التي لها تطبيقات كثيرة في اغلب العلوم النظرية والتطبيقية اذ يمكن الاستفادة منها في اغلب المجالات فضلا عن دورها المهم في توسيع مدارك الفرد وتنمية قدراته على التحليل والتفكير المنطقي والاستنتاج السليم.

لقد نالت الرياضيات اهتمام العرب فبرعوا فيها واغنوها باضافات مهمة في جوانب كثيرة. وكانت مؤلفاتهم الكثيرة في مجالات الاعداد وخواصها اذ كان كتاب "الجبر والمقابلة" للعالم العربي الخوارزمي خير دليل على ذلك فكان الاول من نوعه من حيث المادة العلمية والترتيب والتبويب.

يحتوي كتابنا الذي بين يديك على عشرة فصول عرضت فيها المادة العلمية بشكل مبسط يتلائم ومدارك الطلبة اذ تضمنت الفصول شرحا وافيا للطرق والنظريات معززا بالامثلة التي يحتاجها الطالب في هذه المرحلة من دراسته وبعد تخرجه وروعي في الكتاب تغطية مفردات مادة الرياضيات والتحليل العددي في اقسام أنظمة الحاسبات التابعة لهيئة التعليم التقني وأمل ان أكون قد اسديت خدمة علمية للطلبة والمعنيين في هذا المجال في توضيح الجوانب الاساسية النظرية والتطبيقية معززة بالامثلة.

والله الموفق

المؤلف



المحتويات

المقدمة.....	5
المحتويات.....	7
الفصل الأول نظرية المجموعات وطرق العد.....	15
1-1 المجموعات.....	17
1-1-1 طرق تعيين المجموعة:.....	17
1-1-2 الانتساب:.....	18
1-2 انواع المجموعات.....	19
1-2-1 المجموعة الخالية.....	19
1-2-2 المجموعات الجزئية.....	19
1-2-3 المجموعات المتساوية.....	20
1-2-4 المجموعة المنتهية وغير المنتهية.....	21
1-2-5 المجموعة الشاملة.....	22
1-3 عمليات على المجموعات:.....	22
1-3-1 الاتحاد.....	23
1-3-2 التقاطع.....	24
1-3-3 المتممة للمجموعة.....	25
1-3-4 الفضلة.....	26
1-4 جبر المجموعات.....	27

27.....	1-4-1 قوانين التوزيع
28.....	1-4-2 القوانين الذاتية
29.....	1-4-3 قوانين المتمم
30.....	1-4-4 قوانين دي موركان
31.....	1-5 الازواج المرتبة والحاصل الديكارتى
32.....	1-6 رمز المجموع
35.....	1-7 التباديل والتوافيق
36.....	1-7-1 التباديل
40.....	1-7-2 التوافيق
43.....	1-8 نظرية ذي الحدين
47	تمارين الفصل الاول
53	الفصل الثاني المتجهات والمصفوفات والمحددات
55.....	2-1 المتجه (Vector)
56.....	2-1-1 أنواع المتجهات
57.....	2-1-2 تمثيل المتجهات:
58.....	2-1-3 جمع المتجهات
59.....	2-1-4 ضرب المتجهات:
67.....	2-2 المصفوفات:
70.....	2-2-1 انواع المصفوفات:
74.....	2-2-2 جمع المصفوفات:
75.....	2-2-3 قوانين الجمع للمصفوفات:
76.....	2-2-4 ضرب المصفوفات:

77	2-2-5 قوانين ضرب المصفوفات:
81	2-3 المحددات:
81	2-3-1 المحدد الثنائي:
82	2-3-2 المحدد الثلاثي:
84	2-3-3 فك المحددات بواسطة العوامل المتمة:
86	2-4 خواص المحددات:
92	2-4 تطبيقات المصفوفات والمحددات:
92	2-4-1 إيجاد معكوس المصفوفة:
97	2-4-2 حل المعادلات الخطية:
103	تمارين الفصل الثاني
109	الفصل الثالث التفاضل
111	3 – العلاقات والدوال
111	3-1 العلاقات
111	3-1-1 بيان العلاقة
112	3-2 الدوال
114	3-3 الصيغ غير المعرفة
114	3-4 الغاية للدالة
117	3-4-1 الغاية من اليسار والغاية من اليمين
118	3-4-2 بعض خواص الغاية
123	3-5 المشتقات وقوانينها:
123	3-5-1 مفهوم مشتقة الدالة:

126.....	2-5-3 قاعدة لوبيتال
127.....	3-5-3 قوانين الاشتقاق:
131.....	4-5-3 قاعدة السلسلة:
134.....	6-3 تفاضل الدوال غير الجبرية:
134.....	1-6-3 تفاضل الدوال المثلثية
136.....	2-6-3 تفاضل الدوال الاسية واللوغارتمية
140.....	7-3 التفاضل الضمني:
143.....	8-3 الاشتقاقات العليا
145.....	9-3 تطبيقات التفاضل
145.....	1. الدوال المتزايدة والمتناقصة
146.....	1-9-3 القيم العظمى والصغرى
150.....	2-9-3 فترات التقعر للدالة
151.....	3-9-3 نقاط الانقلاب
152.....	10-3 الاستمرارية
153.....	11-3 التفاضل الجزئي:
156.....	1-10-3 تطبيقات التفاضل الجزئي:
159.....	تمارين الفصل الثالث
165.....	الفصل الرابع التكامل
167.....	1-4 التكامل غير المحدود:
168.....	2-4 قوانين التكامل
172.....	3-4 بعض طرق التكامل

172	1-3-4 التكامل بالتجزئة
175	2-3-4 التكامل بطريقة الاستعاضة بالنسب المثلثية
180	3-3-4 طريقة التكامل بالكسور الجزئية
185	4-4 التكامل المحدود
186	1-4-4 تطبيقات التكامل المحدود
197	تمارين الفصل الرابع
201	الفصل الخامس المتسلسلات غير المنتهية
203	1-5 المتابعة :
203	1-1-5 طرق كتابة المتابعة:
204	2-1-5 مدى المتابعة:
204	3-1-5 المتابعة المقاربة:
205	4-1-5 غاية المتابعة:
208	2-5 المتسلسلات اللانهائية
209	1-2-5 المتسلسلة المقاربة وغير المقاربة:
212	2-2-5 اختبار النسبة للتقارب:
213	5-3 متسلسلة تايلر ومتسلسلة ماكلورين
217	تمارين الفصل الخامس
221	الفصل السادس المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى
223	1-6 مفهوم المعادلة التفاضلية:
224	2-6 الحل العام والحل الخاص:
225	3-6 حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى

226	1-3-6 فصل المتغيرين:
229	2-3-6 المعادلة التفاضلية المتجانسة
234	3-3-6 المعادلة التفاضلية الخطية
241	4-3-6 المعادلة التفاضلية التامة:
247	تمارين الفصل السادس
249	الفصل السابع التحليل العددي
251	1-7 تمهيد:
251	2-7 انواع الاخطاء:
255	3-7 الاستكمال:
258	4-7 الصيغ المستخدمة في الاستكمال:
258	1-4-7 صيغة لاكرانج:
261	2-4-7 جداول الفروق:
265	3-4-7 صيغة نيوتن - كريكوري:
271	تمارين الفصل السابع
275	الفصل الثامن حل المعادلات الخطية واللاخطية
277	1-8 حل المعادلات الخطية:
278	1-1-8 طرائق الحل:
288	2-8 حل المعادلات الخطية:
289	1-2-8 الطرائق المباشرة للحل:
306	2-2-8 الطرائق التكرارية:
317	تمارين الفصل الثامن

المحتويات	
323.....	الفصل التاسع التفاضل والتكامل العددي
325.....	9-1 التفاضل العددي:
325.....	9-1-1 صيغ المشتقات عند نقاط جدول البيانات:
327.....	9-1-2 صيغ عددية للمشتقات عند نقاط ليست بجدول البيانات:
330.....	9-2 التكامل العددي:
331.....	9-2-1 طريقة شبه المنحرف (المضلع المنحرف):
335.....	9-2-2 قاعدة سمبسون:
338.....	9-2-3 صيغ نيوتن كوتس المفتوحة
343.....	تمارين الفصل التاسع
347.....	الفصل العاشر الحلول العددية للمعادلات التفاضلية
349.....	10-1 المقدمة:
350.....	10-2 طرائق حل المعادلات التفاضلية:
350.....	10-2-1 صيغة اويلر:
351.....	10-2-2 صيغة تايلر:
354.....	10-2-3 طريقة اويلر المطورة:
357.....	10-2-4 طريقة رانج - كوتا:
363.....	تمارين الفصل العاشر
367.....	المصادر العربية.....
368.....	المصادر الأجنبية.....



الفصل الأول

نظرية المجموعات وطرق العد

1-1 المجموعات

1-2 انواع المجموعات

1-3 عمليات على المجموعات:

1-4 جبر المجموعات

1-5 الازواج المرتبة والحاصل الديكارتي

1-6 رمز المجموع

1-7 التباديل والتوافيق

1-8 نظرية ذي الحدين



نظرية المجموعات وطرق العد

1-1 المجموعات SET

تعتبر المجموعة من المفاهيم الرئيسية في الرياضيات، ويمثل تجمع من الأشياء منقول مجموعة الطيور او مجموعة الحروف، ويرمز للمجموعة عادة باحد الاحرف الكبيرة (A, B, C, ...) وان كل فرد من افراد المجموعة يسمى بالعنصر (Element) ويمثل باحد الحروف الصغيرة (a, b, c, ...).

1-1-1 طرق تعيين المجموعة،

هناك طريقتان لتعيين المجموعة هي:

أ. تعيين المجموعة اذا عرفت جميع عناصرها ويمكننا عندئذ كتابتها بذكر جميع عناصرها بين قوسين من نوع { } مع وضع فارزة بين كل عنصرين متتاليين، فاذا رمزنا لمجموعة حروف كلمة Computer بـ A فاننا نكتب $A = \{c, o, m, p, u, t, e, r\}$ وان $B = \{1, 2, \dots, 99\}$ تعني أن B مجموعة عناصرها الأعداد الصحيحة الموجبة التي أقل من 100.

ب. يمكن تعيين المجموعة بذكر كل الخواص التي تميز عناصرها بحيث

المجموعات وطرق العد

يمكن باستخدام هذه الخواص ان نحدد بطريق ما اذا كان عنصر ما ينتمي الى هذه المجموعة او لا ينتمي لها. فمثلا يمكن كتابة المجموعتين $A-B$ السابقة بالشكل الاتي:

$$A = \{x : \text{حرف من حروف computer}\}$$

$$B = \{x : \text{عدد صحيح موجب اقل من } 100\}$$

كما ان تغيير ترتيب العناصر في المجموعات وارد ولكن تكرار العنصر اكثر من مرة واحدة عند كتابة المجموعة غير مسموح به.

1-1-2 الانتماء:

اذا كان a عنصرا من المجموعة A فاننا نقول ان a ينتمي الى A ويكتب $x \in a$ ونقرا (a ينتمي الى x) اما اذا كان a ليس عنصرا من عناصر المجموعة x منقول (a لا ينتمي الى x) ويكتب $x \notin a$.

مثال 1-1

اذا كانت $Y = \{0, 2, 4, 8, 10, 12\}$ فان: $5 \notin Y, 2 \in Y, 1 \notin Y, 4 \in Y$

1.2 انواع المجموعات

1-2-1 المجموعة الخالية Empty Set

يقال للمجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر بانها مجموعة خالية، ويستخدم عادة الرمز ϕ الذي يقرأ (فاي) ليدل على المجموعة الخالية، كما يقال للمجموعة التي تتكون من عنصر واحد مجموعة احادية (Singleton set).

مثال 1-2

مجموعة الاعداد الطبيعية التي اكبر من 2 واصغر من 3 هي مجموعة خالية أي:

$$\phi = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 < x < 3\}$$

حيث \mathbb{N} تمثل مجموعة الاعداد الطبيعية

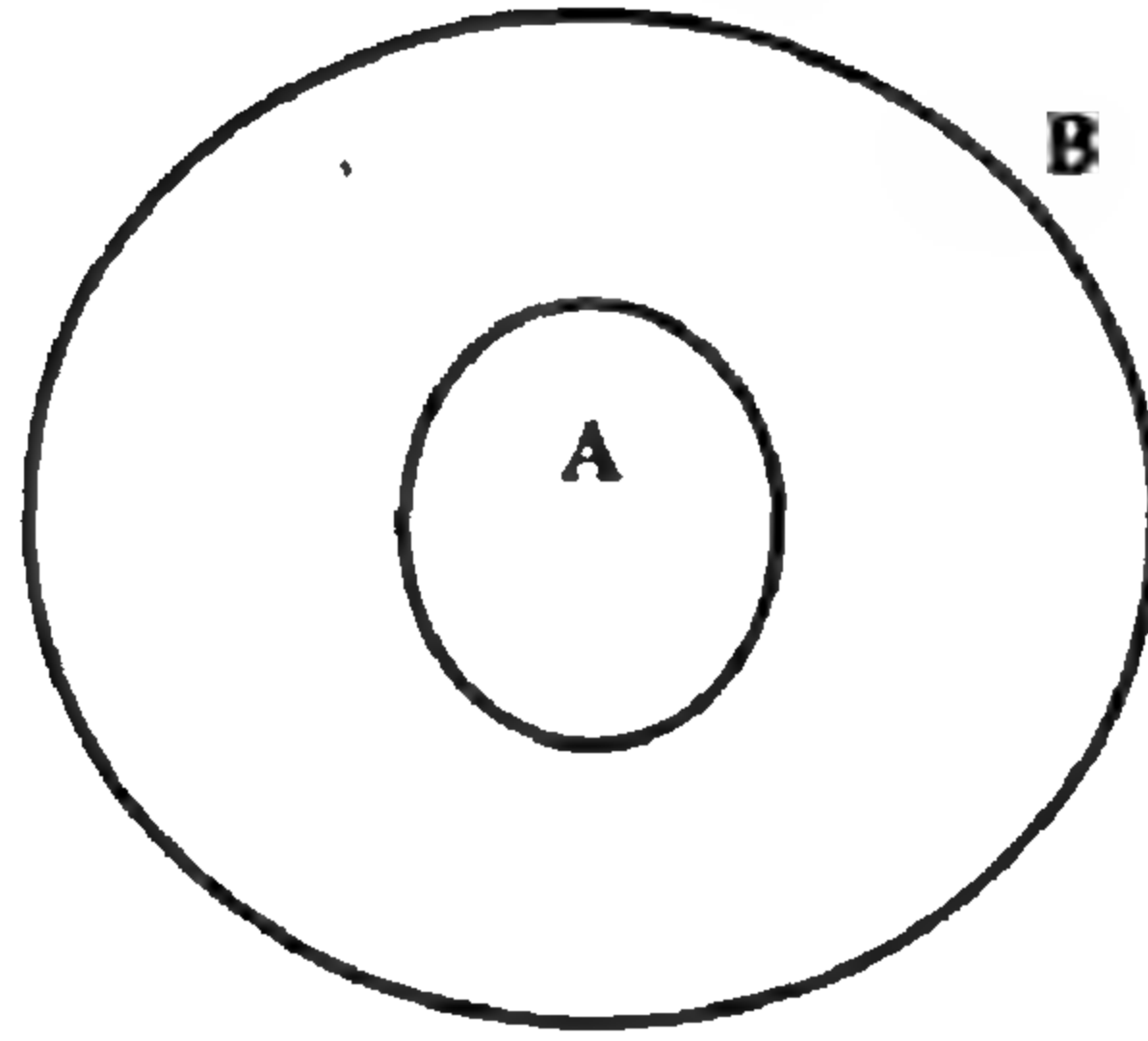
1-2-2 المجموعات الجزئية Subsets

يقال ان A مجموعة جزئية من المجموعة B اذا كان كل عنصر من عناصر A ينتمي الى B وتكتب $B \supseteq A$ كما يمكن ان يقال ان المجموعة B حاوية للمجموعة A ويمكن ان تكتب $A \subseteq B$.

مثال 1-3

لتكن B مجموعة طلاب قسم أنظمة الحاسبات وان A مجموعة طلاب الصف الاول أنظمة حاسبات، فان كل طالب في الصف الاول هو طالب في القسم وعليه فان $B \subseteq A$.

ويمكن تمثيل ذلك بمخطط كما يلي:



يعية.

المجموعات المتساوية Equal Sets 1-2-3

يقال للمجموعتين A, B بانها متساويتان اذا كان كل عنصر في A هو عنصر في B وكل عنصر في B هو عنصر في A وتكتب $A=B$.

مثال 1-4

متساويتان $A=\{1,4,4,5,5\}$, $B=\{4,1,5\}$

مثال 1-5

ليكن $X = \{x: -1 \leq x < 4 \text{ عدد صحيح}\}$

$$Y = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$X = Y$$

فان

مثال 1-6 لتكن

$$A = \{x: x^2 - 3x = -2\}$$

$$B = \{2, 1\}$$

$$C = \{1, 2\}$$

فان

$$A = B = C$$

1-2-4 المجموعة المنتهية وغير المنتهية

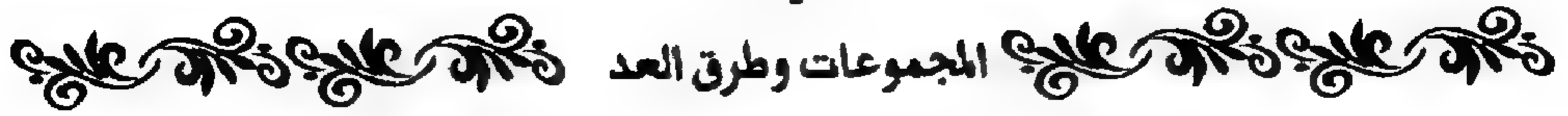
Finite and Infinite Sets

يقال للمجموعة A انها مجموعة منتهية اذا شملت على n من العناصر المختلفة وبخلافه تسمى المجموعة غير منتهية.

مثال 1-6

1. ان المجموعة $A = \{a, b, c, d\}$ مجموعة منتهية بينما المجموعة

$B = \{1, 2, 3, \dots\}$ غير منتهية.



2. مجموعة سكان الكرة الأرضية منتهية، ولكن مجموعة الأعداد الطبيعية غير منتهية.

3. مجموعة عواصم الأقطار العربية مجموعة منتهية.

1-2-5 المجموعة الشاملة Universal Set

في أية دراسة يجب أن تكون هناك مجموعة معينة بحيث أن جميع المجموعات المختلفة المدروسة مجموعات جزئية لها وتدعى هذه المجموعة بالمجموعة الشاملة ويرمز لها بـ U .

مثال 1-8

إذا كنا نتحدث عن مجموعة من أعداد صحيحة غير سالبة مثل:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad B = \{2, 4, 6, 8\} \quad C = \{0, 1, 2, 9\}$$

فيمكن اعتبار أن المجموعة $U = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ مجموعة شاملة

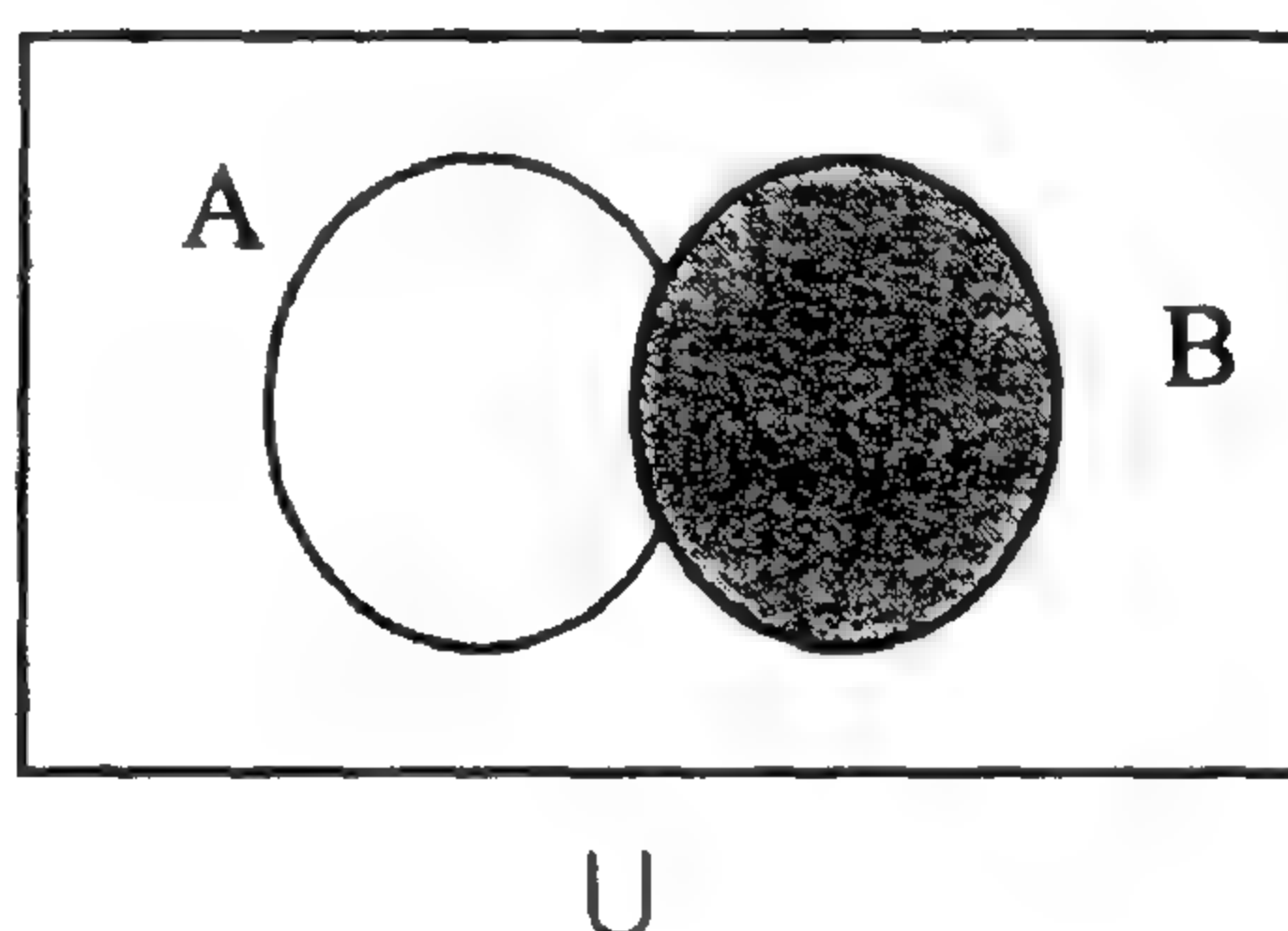
1.3 عمليات على المجموعات:

هناك بعض العمليات الأساسية التي ستعرف عليها والتي نستطيع من خلالها أن نشكل مجموعات جديدة من مجموعات معلومة وهي مشابهة للعمليات الأولية الجبرية وهي:

إذا كانت B, A مجموعتين فإن المجموعة التي تتكون من جميع العناصر الموجودة على الأقل في إحدى المجموعتين تسمى اتحاد المجموعتين ويرمز لها بـ $B \cup A$ أي أن:

$$A \cup B = \{X : X \in A \text{ or } X \in B\}$$

ويمكن تمثيل الاتحاد بين المجموعتين B, A كما يلي:



مثال 9-1

إذا كانت $B = \{2, 3, 5\}$ ، $A = \{1, 2, 3, 4\}$

فان $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

مثال 10-1

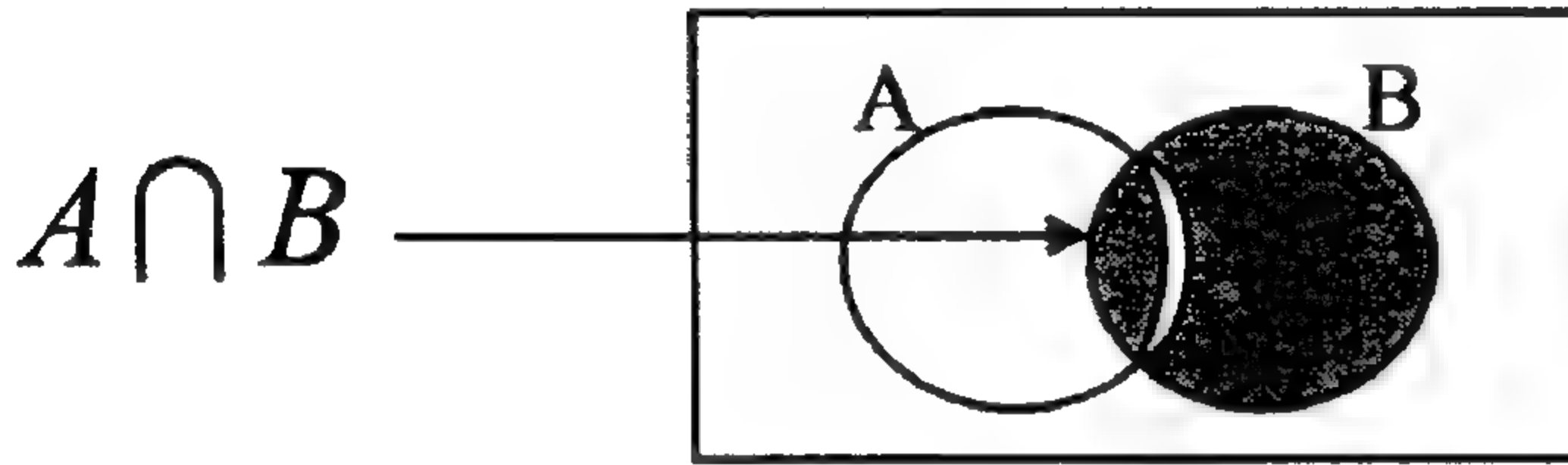
إذا كان $B = \{a, b, c, d\}$ و $A = \{e, f, g, c\}$

$$B \cup A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

لتكن B, A مجموعتين، فإن المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى كل من A و B معا تسمى تقاطع المجموعتين ويرمز لها بـ $B \cap A$ ويطلق على \cap برمز عملية التقاطع أي أن:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$

ويمكن تمثيل التقاطع بشكل كالآتي:



كما يمكن تعريف تقاطع عدة مجموعات كما يلي:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

إذا كانت مجموعة تقاطع المجموعتين A و B مجموعة خالية فيقال لها مجموعتان منفصلتان (disjoint sets).

مثال 1-11

إذا كانت A_1 المجموعة العرفة كما يلي:

$$A1 = \{x: x=3y, y \in N\}$$

$$A2 = \{x: x=2y, y \in N\}$$

وان

فان

$$A1 \cap A2 = \{x: x=6y, y \in N\}$$

مثال 1-12

$$A1 = \{3, 6, 9, 10, 5\}$$

لتكن

$$A2 = \{9, 10, 2, 1, 4\}$$

$$A3 = \{5, 2, 6, 10, 3\}$$

$$A1 \cap A2 = \{9, 10\}$$

$$A1 \cap A3 = \{5, 6, 10\}$$

$$A2 \cap A3 = \{10, 2\}$$

$$A1 \cap A2 \cap A3 = \{10\}$$

The Complement of a set

1-3-3 المتمة للمجموعة

إذا كانت A مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة U فالمجموعة

المكونة من عناصر U التي لا تنتمي إلى A تسمى متمة المجموعة A

ويرمز لها بـ A^c

مثال 1-13

إذا كانت $A=\{a,c,d,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$

فان $A^c = \{b,e\}$

مثال 1-14

إذا كانت المجموعة الشاملة هي طلبة قسم أنظمة الحاسبات وكانت المجموعة A تمثل طلبة الصف الثاني في قسم الأنظمة فان A^c تمثل طلبة قسم أنظمة الحاسبات عدا طلبة الصف الثاني.

1-3-4 **الفضلة** The difference

إذا كانت B, A مجموعتين، فان المجموعة التي تحتوي على العناصر المنتمية لـ A وغير المنتمية لـ B تسمى فضلة A على B او فرق A عن B ويرمز لها بـ $A \setminus B$ او $A - B$.

مثال 1-15

إذا كانت $A=\{1,2,3,4,5,6\}$

$B=\{2,3,4\}$

$A \setminus B = \{1,4,5,6\}$

$B \setminus A = \emptyset$

سنطرق في هذه الفقرة للخواص الأساسية للعمليات (U, \cap, \cup) على

المجموعات وسنعرض مثال لكل حالة للتوضيح:

Distribution laws

1-4-1 قوانين التوزيع

إذا كانت لدينا المجموعات الثلاث C, B, A فإن

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ أ.}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ ب.}$$

مثال 1-16

إذا كانت لدينا $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 5, 6\}$

$$C = \{2, 5, 6, 1\}$$

لأثبت القانون الأول

$$B \cap C = \{1, 2, 5, 6\} \longrightarrow A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 5\}$$

ويمثل الطرف الأيسر

$$A \cap B = \{2, 5\} \quad A \cap C = \{1, 2\}$$

الطرف الأيمن

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 5\}$$

فان الطرف الايمن = الطرف الايسر

لا ثبات القانون الثاني

$$B \cap C = \{2,5,6\} \longrightarrow A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4,5,6\}$$

ويمثل الطرف الايسر

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$$

ويمثل الطرف الايمن

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,2,3,4,5,6\}$$

فان الطرف الايمن = الطرف الايسر

Identity laws

1-4-2 القوانين الذاتية

اذا كانت B مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة U فان:

$$\phi = \phi \cap A \text{ ج.}$$

$$A = \phi \cup A \text{ أ.}$$

$$A = A \cap U \text{ د.}$$

$$U = U \cup A \text{ ب.}$$

مثال 1-17

$$U = \{a,b,c,d,e,f\}$$

اذا كانت

$$A = \{a,b,e\}$$

فان

$$أ. \quad A \cup \phi = \{a, b, e, \phi\} = \{a, b, e\} = A$$

$$ب. \quad A \cup U = \{a, b, e\} \cup \{a, b, c, d, e, f\} = \{a, b, c, d, e, f\} = U$$

$$ج. \quad A \cap \phi = \{a, b, c\} \cap \{\phi\} = \phi$$

$$د. \quad A \cap U = \{a, b, e\} \cap \{a, b, c, d, e, f\} = \{a, b, e\} = A$$

قوانين المتمم Complement Laws 1-4-3

إذا كانت A مجموعة جزئية من المجموعة الكلية (الشاملة) U فان:

$$أ. \quad A \cap A^c = \phi \quad ج. \quad (A^c)^c = A$$

$$ب. \quad A \cup A^c = U \quad د. \quad U^c = \phi$$

مثال 1-18

$$U = \{1, 2, \dots, 10\} \quad A = \{1, 3, 5, 7\} \quad \text{إذا كانت}$$

فان

$$أ. \quad A^c = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\} \longrightarrow A \cap A^c = \phi$$

$$ب. \quad A \cup A^c = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\} = U$$

$$A^c = \{2,4,6,8,9,10\} \longrightarrow (A^c)^c = \{1,3,5,7\} \text{ جـ.}$$

$$U = \{1,2,\dots,10\}$$

$$U^c = \{\emptyset\} \text{ د.}$$

1.4.4 قوانين دي موركان De Morgan's laws

إذا كانت A, B مجموعتين فان:

$$أ. (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$ب. (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

ويمكن اعتماد القانونين لاي عدد من المجموعات.

مثال 19-1

$$U = \{a,b,c,d,e,f,g\} \quad \text{إذا كانت}$$

$$A = \{a,b,c\}$$

$$B = \{b,d,f,c\}$$

فان:

$$A^c = \{d,e,f,g\}, \quad B^c = \{a,g,e\}$$

$$A \cup B = \{a,b,c,d,f\} \longrightarrow (A \cup B)^c = \{e,g\}$$

$$A^c \cap B^c = \{e,g\}$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

وعليه فان

وكذلك

$$A \cap B = \{b, c\} \quad (A \cap B)^c = \{a, d, e, f, g\}$$

$$A^c \cup B^c = \{a, d, f, e, g\}$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

وعليه فان

1-5 الأزواج المرتبة والحاصل الديكارتي

The Order pairs and Cartesian product

ان كل عنصرين a, b مأخوذين بالترتيب a ثم b وتسمى a العنصر الاول او المركبة الاولى او الحفظ الاول كما يسمى b بالعنصر الثاني او المركبة الثانية او الحفظ الثاني ويكتبان بالشكل (a, b) ويسمى بالزوج المرتب.

واذا كانت B, A مجموعتين فان الحاصل الديكارتي للمجموعة A فب المجموعة B هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الاول من المجموعة A ومسقطها الثاني من المجموعة B وتكتب $A * B$ أي ان:

$$b \in A, b \in A * B = \{(a, b) : a$$

مثال 1-20 اذا كانت

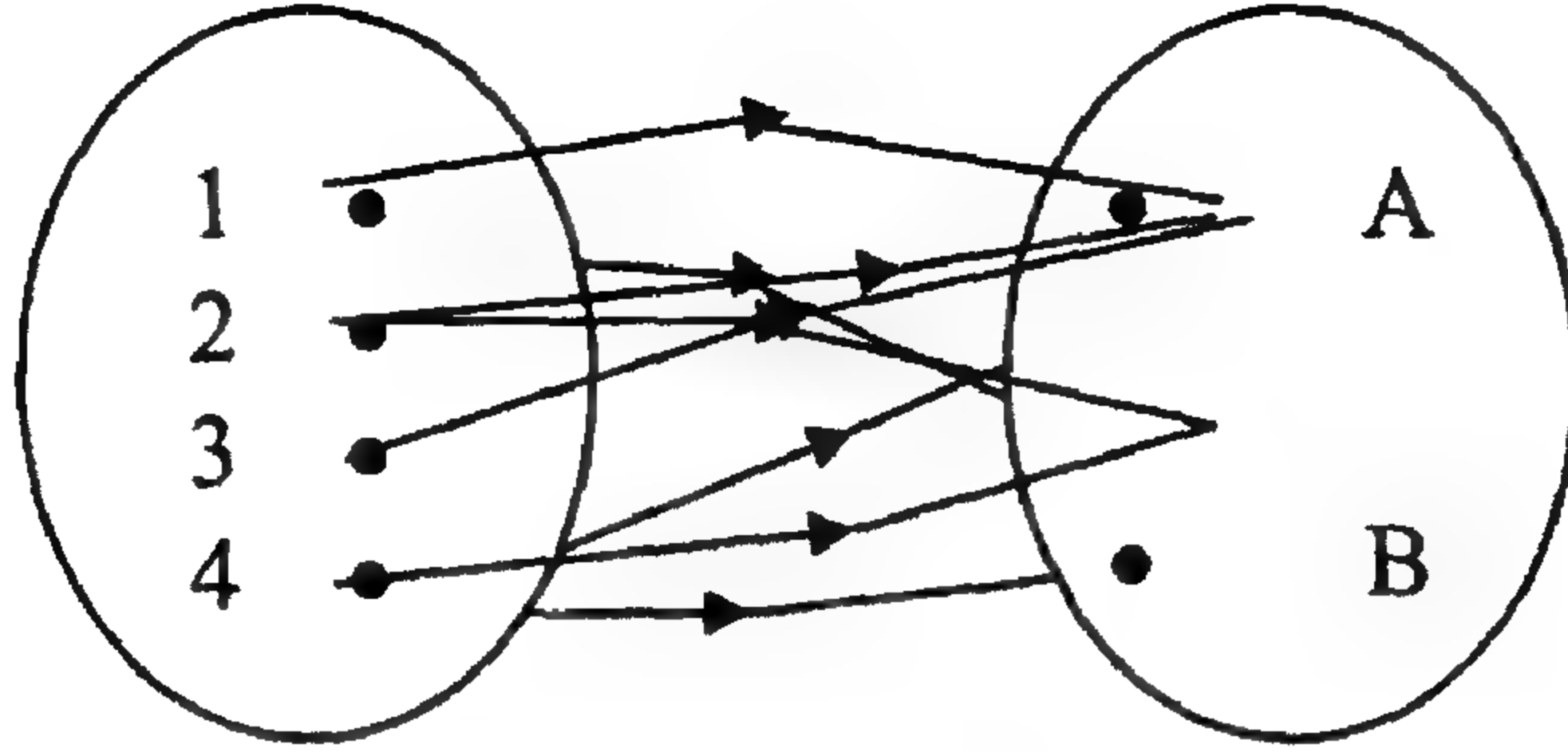
$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{a, b\}$$

فان

$$A * B = \{(1, a)(2, a)(3, a)(4, a)(1, b)(2, b)(3, b)(4, b)\}$$

ويمكن تمثيل ذلك بالمخطط الآتي:



Summation

1.6 رمز المجموع

غالباً ما نحتاج إلى عملية جمع سلسلة من الأعداد والكميات، فإذا كان العدد الأول X_1 والثاني X_2 والثالث X_3 وهكذا إلى n من الحدود فإن المجموع الكلي لهذه الأعداد هو:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

فإذا كانت $n=10$ فإن المجموع سيكون

$$X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$$

وبهدف تسهيل عملية كتابة هذا المجموع بشكل أكثر اختصاراً فيتم

التعبير عنه بالشكل $\sum_{i=1}^{10} X_i$ حيث أن Σ رمز يشير إلى عملية الجمع وهو

حرف إغريقي يلفظ Sigma وأن i يمثل الدليل لتسلسل العدد، فإذا

كانت $i=1$ فذلك يعني العدد الأول وإذا كانت $i=4$ فبمعنى العدد الرابع



وهكذا وان التعبير عن المجموع n من الاعداد هو $\sum_{i=1}^n X_i$.

وبشكل عام يرمز للدليل باحد الاحرف الصغيرة، وفيما يلي بعض استخدامات هذا الرمز.

اذا كانت لدينا سلسلة الاعداد $X_1, X_2 \dots X_n$ فان:

1. مجموع مربعات قيم السلسلة تكتب $\sum_{i=1}^n X_i^2$

2. مربع مجموع قيم السلسلة $(\sum_{i=1}^n X_i)^2$

3. مجموع مقلوب قيم السلسلة $\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i} = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \dots + \frac{1}{X_n}$

4. مقلوب مجموع عناصر السلسلة $\frac{1}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}$

5. مجموع جذر قيم السلسلة $\sum_{i=1}^n \sqrt{X_i} = \sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} + \dots + \sqrt{X_n}$

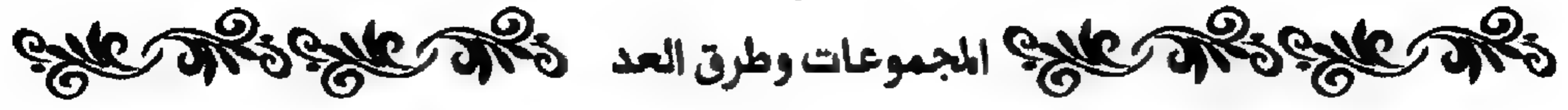
اما خواص رمز المجموع فهي:

أ. مجموع الكمية الثابتة الى n من الحدود هو

$$\sum_{i=1}^n K = K + K + K + \dots + K = nK$$

ب. مجموع حاصل ضرب الثابت بقيم السلسلة X_i يكون

$$\sum_{i=1}^n kX_i = k \sum_{i=1}^n X_i$$



ج. مجموع حاصل اضافة او طرح الثابت k من قيم السلسلة X_i هو

$$\sum (X_i \mp k) = \sum X_i \mp k$$

د. مجموع حاصل جمع او طرح قيم السلسلة X_i وعناصر السلسلة Y_i

هو

$$\sum_{i=1}^n (X_i \mp Y_i) = \sum X_i \mp \sum Y_i$$

هـ. يمكن تجزئة مجموع قيم السلسلة X_i الى جزئين او اكثر أي

$$\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^t X_i + \sum_{i=t+1}^n X_i, \dots, t < n$$

و. مجموع حاصل ضرب قيم السلسلتين X_i و Y_i هو

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i = X_1 Y_1 + \dots + X_n Y_n$$

مثال 1-21 اذا كانت

$$X_i = 3, 2, 6, 1, 4$$

$$Y_i = 1, 6, 3, 2, 2$$

فان

$$\sum X_i = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 3 + 2 + 6 + 1 + 4 = 16$$

$$\sum Y_i^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + Y_5^2 = 1 + 6^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 = 1 + 36 + 9 + 4 + 4 = 54$$

$$\sum 3 X_i = 3 \sum X_i = 3(16) = 48$$

$$\sum (X_i - 4) = \sum X_i - n(4) = \sum X_i - 5(4) = 16 - 20 = -4$$

$$(\sum X_i)^2 = (16)^2 = 256$$

$$\sum \frac{1}{X_i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} = \frac{54}{24}$$

$$\sum \sqrt{X_i} = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{1} + \sqrt{4} =$$

$$\sum X_i Y_i = 3(1) + 2(6) + (6)(3) + 1(2) + 4(2) = 3 + 12 + 18 + 2 + 8 = 43$$

$$\sum (X_i - Y_i) = \sum X_i - \sum Y_i = 16 - 14 = 2$$

$$\begin{aligned} \sum (X_i - 2)(Y_i - 3) &= \sum X_i Y_i - 3 \sum X_i - 2 \sum Y_i + \sum 6 = 43 - 3(16) - 2(14) + 30 \\ &= 73 - 48 - 28 = -3 \end{aligned}$$

1.7 التباديل والتوافيق

Permutations & Combination

تعتبر طرق العد ومنها التوافيق والتباديل من المواضيع المهمة في دراسية الاحتمالات وخاصة في التطبيقات الاحصائية، فعندما نرغب بايجاد عدد الطرق التي يمكن لحادثة ان تحدث وعدد الطرق التي يمكن ترتيب عناصر مجموعة ما او عدد المجموعات المختلفة التي يمكن تكوينها من عدد معين من الاشياء لا بد من دراسة الطرق المختلفة لحساب تلك الاعداد.

1.7.1 التباديل

التبديل هو عدد التراتيب التي يمكن الحصول عليها من مجموعة

نظرية

المجموعات وطرق العد

اشياء باخذها كلها او بعضها، فاذا كان لدينا n من الاشياء ونريد ان نرتب r منها ($n \geq r$) فان عدد الطرق الممكنة للترتيب يمكن كتابتها كما يلي P_r^n ويمكن كتابتها رياضيا كما يلي:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \dots \quad 2-2$$

حيث ان $n!$ (يقرأ مضروب n) وان n عدد صحيح موجب أي ان

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1$$

فمثلا

$$1! = 1$$

$$2! = 2.1 = 2$$

$$4! = 4.3.2.1 = 24$$

$$0! = 1$$

ونتفق على ان

ويمكن كتابة $n!$ رياضيا كما يلي:

$$n! = n \Gamma n = \Gamma n + 1$$

حين Γ تمثل دالة كانا (gamma function) وان

$$\Gamma n = (n-1)!$$

مثال 22-1

ماهي الطرق الممكنة لتكوين كلمة من ثلاثة احرف من احرف كلمة

AHMAD

$$r=3, n=5$$

$$P_3^5 = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 60 \quad \text{كلمة}$$

مثال 23-1

بكم طريقة يمكن لمجموعة من ستة اشخاص ترتيب انفسهم:

1. بخط مستقيم 2. حول مائدة مستديرة

الحل:

1. ان عدد طرق ترتيب ستة اشخاص هي:

$$P_6^6 = \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{6!}{1!} = 6! = 720$$

2. لترتيب ستة اشخاص في شكل دائري، يثبت احدهم ثم رتب

البقية بالنسبة له وستكون عدد الطرق:

$$P_5^5 = (n-1)! = 5! = 120$$

كما يمكن تعميم العلاقة (2-2) عند تجزئة عدد العناصر الكلية

نظرية

المجموعات وطرق العد

n الى k من المجموعات الجزئية تحوي على n_1 من العناصر المتشابهة و n_2 من العناصر المتشابهة الاخرى،...، n_k من العناصر المتشابهة الاخرى حيث ان:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

فان عدد التباديل الممكنة من هذه العناصر هي:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

مثال 1-24

ما هي عدد التباديل الممكنة التي يمكن تكوينها من احرف كلمة

Statistic

الحل: بما ان الحرف t متكرر ثلاث مرات والحرف I, s مرتان فان:

$$\text{عدد التباديل} = \frac{9!}{2!3!2!1!1!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 15120$$

مثال 1-25

صندوق يحتوي على (20) بطاقة مرقمة 1، 2، ...، 20 فاذا اردنا ان

نرتب ثلاثة منها مما هي عدد الطرق الممكنة

$$P_3^{20} = \frac{20!}{17!} = 20(19)(18) = 6840 \quad \text{طريقة}$$

مثال 1-26

كم عدد يمكن تكوينه من الاعداد 3،4،5،6،7،8،9 بحيث يبدأ بالرقم 3 ويتكون من اربعة مراتب

الحل: نستبعد العدد 3 لاننا سنضعه مع كل عدد تكونه وبذلك يتبقى تكوين عدد من ثلاثة مراتب فان عدد الاعداد المطلوب تكوينها هي:

$$P_3^6 = \frac{6!}{3!} = 120$$

مثال 1-27

للمثال السابق كم عدد زوجي مكون من اربعة مراتب:

الحل: بما ان هناك ثلاثة ارقام زوجية هي (4،6،8) والتي وضع احداها في اول أي عدد سيكون العدد زوجي وعليه فان عدد الطرق لاختيار احداها هو (3) وبذلك استبعدنا احد الارقام وبقي ستة ارقام نرتب منهم ثلاثة فسيكون عدد الاعداد المطلوب هو:

$$3.P_3^6 = 3(120) = 360$$

مثال 1-28

احمد يمتلك ثلاثة اشياء، ويمتلك عمر تسعة اشياء، جد عدد الطرق

نظرية

المجموعات وطرق العد

التي يتمكنان بها من تبادل الاشياء فيما بينهما بشرط احتفاظ كل منهما بالعدد الاصلي للاشياء التي كانت معه.

الحل: بما ان احمد يمتلك ثلاثة اشياء ويرغب بتبادلها مع اشياء عمر فان على عمر ان يختار ثلاثة اشياء ليتبادلها مع احمد أي ان عدد الطرق هي:

$$P_3^9 = \frac{9!}{6!} = 9.8.7 = 504 \quad \text{طريقة}$$

1.7.2 التوافيق Combination

هي عملية اختبار او سحب عدد من الاشياء من العدد الكلي للاشياء بدون ان نأخذ بنظر الاعتبار الترتيب، ويرمز للتوافيق الممكنة لاختيار r من الاشياء من n من الاشياء الكلية بـ C_r^n .

مثال 1-29

اذا كان اربع فرق في جامعات البصرة، بغداد، الموصل، المستنصرية و اردنا اختيار فريقين منهما لمباراة كرة السلة فان عدد الطرق الممكنة هي:

(بصرة، بغداد) (بصرة، موصل) (بصرة، مستنصرية) (بغداد، موصل)
(بغداد، مستنصرية) (الموصل، المستنصرية) ويلاحظ ان الترتيب غير مهم وتكون عدد التوافيق الممكنة هي 6:

لدينا خمسة اشخاص هم (E,D,C,B,A) ويراد تكوين لجنة من ثلاثة منهم فما هي عدد الطرق الممكنة للاختيار.

(A,B,C)(A,B,D)(A,B,E)(A,C,D)(A,C,E)

(A,D,E)(B,C,D)(B,C,E)(C,D,E)(B,D,E)

أي ان عدد الطرق الممكنة هي (10) توافق

وان الصيغة الرياضية لايجاد عدد التوافق الممكنة لاختيار r من الاشياء من n من الاشياء الكلية كما يلي:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_{n-r}^n$$

بكم طريقة يمكن اختيار اربعة اشخاص من (20) شخص لاختيار وفد.

$$C_4^{20} = \frac{20!}{4!16!} = \frac{20.19.18.17}{4!} = 4845 \quad \text{طريقة}$$

بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ثمانية اعضاء من بين (30) رجلا و(12) امراة بحيث تحتوي اللجنة

1. على ثلاثة رجال فقط. 2. على خمسة رجال على الاقل وامرأتين

على الاقل.

الحل:

1. عدد الطرق لاختيار ثلاثة رجال من ثلاثين رجلا هي C_3^{30} .

عدد الطرق لاختيار خمس نساء من (12) هي C_5^{12} .

فان عدد الطرق لاختيار اللجنة هي:

$$C_3^{30} \cdot C_5^{12} = \frac{30!}{3!27!} \cdot \frac{12!}{5!7!} = (4060)(792) = 3215520$$

2. اللجنة يجب ان تكون من خمسة رجال وثلاث نساء او ستة رجال

وامرأتين.

الحالة الاولى:

$$\text{عدد الطرق} = C_5^{30} \cdot C_3^{12} = (142506)(220) = 31351320$$

الحالة الثانية:

$$\text{عدد الطرق} = C_6^{30} \cdot C_2^{12} = (593775)(66) = 39189150$$

$$\text{عدد الطرق الكلية} = 31351320 + 39189150 = 70540470$$

1.8 نظرية ذي الحدين

عندما يراد إيجاد مفكوك المقدار $(x+y)$ للقوى 2, 3, 4 فيمكن إيجادها بضرب المقار في نفسه عدد من المراد ونحصل على:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = (x+y)^2(x+y)^2 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

وعند ملاحظة الحدود السابقة يمكن استنتاج الآتي:

أ. مجموع قوى x, y في كل حد من حدود المفكوك يساوي قوة المقدار ففي مفكوك $(X+Y)^4$ نجد أن الأسس المرفوعة x إليها هي $(0, 1, 2, 3, 4)$ والأسس المرفوعة Y إليها هي $(4, 3, 2, 1, 0)$.

ب. عدد الحدود في المفكوك $(X+Y)^n$ هو $n+1$

ج. معامل كل حد مرتبته r في مفكوك $(X+Y)^n$ هو C_{r-1}^n فمثلاً معامل

$$\text{الحد الرابع في مفكوك } (X+Y)^4 \text{ يساوي } (C_3^4 = 4)$$

وعليه نستنتج حدود المفكوك $(X+Y)^n$ كما يلي:

$$(x+y)^n = C_0^n X^n + C_1^n X^{n-1}y + C_2^n X^{n-2}y^2 + \dots + C_n^n y^n$$

الذي يطلق عليه نظرية ذي الحدين مع العلم أن $C_0^n = 1$ وأن $C_n^n = 1$.

مثال 1-33

اوجد مفكوك المقدار $(A+2B)^4$

$$(A+2B)^4 = C_0^4 + C_1^4 A^3 (2B) + C_2^4 A^2 (2B)^2 + C_3^4 A (2B)^3 + C_4^4 (2B)^4 A^0 + 8A^3 B + 24A^2 B^2 + 32AB^3 + 16B^4$$

مثال 1-34

اوجد مفكوك المقدار الاتي $(X+Y)^7$

$$(X+Y)^7 = C_0^7 X^7 + C_1^7 X^6 Y + C_2^7 X^5 Y^2 + C_3^7 X^4 Y^3 + C_4^7 X^3 Y^4 + C_5^7 X^2 Y^5 + C_6^7 X Y^6 + C_7^7 Y^7$$

وحيث ان الحد الثاني والرابع يمكن كتابتها كما يلي:

$$L_2 = C_1^7 X^6 Y$$

$$L_4 = C_3^7 X^4 Y^3$$

أي ان الحد من الرتبة r في المفكوك $(X+Y)^N$ هو:

$$L_r = C_{r-1}^N X^{N-r+1} Y^{r-1}$$

مثال 1-35

جد الحد السابع في المفكوك $(A+B)^{10}$

$$L_7 = C_6^{10} A^{10-7+1} B^{7-1} = C_6^{10} A^4 B^6$$

مثال 1-36

اوجد قيمة $(0.8)^5$ بحيث يكون الناتج صحيحا لا قرب ثلاث مراتب عشرية

$$0.8 = 1 - 0.2$$

$$\begin{aligned} (0.8)^5 &= (1 - 0.2)^5 = 1^5 + 5(1)^4(-0.2) + 10(1)^3(-0.2)^2 \\ &\quad + 10(1)^2(-0.2)^3 + 5(1)(-0.2)^4 + (-0.2)^5 \\ &= 1 - 1 + 10(0.04) - 10(0.008) + 5(0.0016) + 0.00032 \\ &= 0.328 \end{aligned}$$

مثال 1-37

جد معامل X في مفكوك $(x + \frac{1}{x})^5$ حيث ان $X \neq 0$ نفرض ان X يظهر في الحد الذي رتبته r أي ان

$$L_r = C_{r-1}^5 X^{5-r+1} \left(\frac{1}{X}\right)^{r-1}$$

$$= B * X^{7-2r} \quad \text{حيث ان } B \text{ هو معامل } X \text{ في الحد من الدرجة } r$$

$$X^{7-2r} = X$$

وبما ان

$$7-2r=1 \Rightarrow r=3 \quad \text{أي الحد الذي يحوي على } X \text{ هو}$$

$$L_3 = C_2^5 X^3 \left(\frac{1}{X}\right)^2 = 10X \quad \text{أي ان}$$

جد الحد الخالي من X في مفكوك $(x^2 + \frac{1}{2x^3})^{15}$ حيث ان $X \neq 0$

نفرض ان الحد الخالي من X هو L_r , أي ان:

$$\begin{aligned} L_r &= C_{r-1}^{15} (X^2)^{15-r+1} \left(\frac{1}{2X^3}\right)^{r-1} \\ &= C_{r-1}^{15} X^{35-5r} \frac{1}{2^{r-1}} \end{aligned}$$

بما ان هذا الحد خال من X فان

$$35-5r = 0 \implies r = 7$$

أي ان

$$L_7 = C_6^{15} \frac{1}{26} = \frac{5005}{64}$$

تمارين الفصل الاول

1. اذا كانت $A=\{1,2,3\}$, $U=\{1,2,\dots,10\}$

$$B=\{1,2,3,7,5\} \quad C=\{2,4,5,6\}$$

احسب

$$a) A \setminus C, \quad b) A \cup C \setminus A, \quad c) B \cap C, \quad d) A \cap B, \quad e) A \cup B$$

2. اذا كان $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,c,e,f\}$, $C=\{c,f,g,h,k\}$

$$a) A \setminus C, b) (A \cap B) \cup B, c) A \cup (B \cap C), d) (A \cup B) \cap C$$

3. أي من المجموعات التالية متساوية:

$$A=\{1,3,75\}$$

$$B=\{6,2,3,4\}$$

$$C=\{X: X \text{ عدد فردي اقل من } 9\}$$

$$D=\{5,1,3,7\}$$

4. اذا كانت $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,5\}$, $C=\{1,3,5,7\}$

$$a) A \times A, b) A \times (B \setminus C), c) (A \times B) \cap (B \times A), d) (A \setminus B) \times (A \setminus C)$$

5. اذا كانت $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6\}$, $C=\{2,5,7\}$

$$D=\{1,3,4\}$$

$$E=\{4,5,6,7\}$$

أوجد $a) A \cup B, b) A \cap B, c) C \cup D, d) C \cap (D \cup E), e) A \cap (C \cup D), f) A \cup B \cup C \cup D$

6. إذا كانت

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 2, 1\}$

b) $A = \{1, 2, 3, 2\}$, $B = \{1, 3, 2, 1, 3\}$

c) $A = \{X : X \in P \text{ عدد زوجي}\}$, $B = \{Y : Y \in N, 2Y + 4 = 2\}$

d) $A = \{X : X \in N, 5 \text{ اقل من } X\}$, $B = \{X : X \in N, 28 \text{ اقل من } (X+1)^2\}$

قارن بين المجموعتين (A, B) وتحقق هل هما متساويتان هم لا.

7. جد ناتج كل مما يلي:

a) $\sum_{i=1}^{20} i$

b) $\sum_{i=4}^8 i^2$

c) $\sum_{k=6}^{10} (1 - \frac{1}{k})$

d) $\sum_{h=1}^6 (h+3)^2$

e) $\sum_{j=1}^8 \sqrt{j+2}$

f) $\sum_{h=1}^5 3^{h+1}$

8. إذا كان $X_i = 1, 2, 3, 4, 3, \dots, Y_i = 2, 1, 3, 3, 5, \dots$ احسب

a) $\sum (x - y)$

b) $\sum \sqrt{x + y}$

c) $\sum x^y$

d) $\sum \frac{x}{y}$

e) $\sum (x - y)^2$

9. جد ناتج ما يلي:

a) $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 (2i + j)$

b) $\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 2^{i+j}$

c) $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^5 (2i + 3j - k)$

المجموعات وطرق العد

10. اذا كانت $X_i=2,3,6,4,8$ $Y_i=3,1,2,1,6$, اوجد:

a) $\sum y^4$ b) $\sum x^2 y^3$ c) $\sum (x_i - y_i)^{-1}$

d) $\sum y(x+1)^2$ e) $\sum 2(x+y)^{-2}$

11. كم عدد من اربعة ارقام يمكن تكوينه من الاعداد 6,5,4,3,2 ؟

12. كم عدد ثلاثيا يمكن تكوينه من الارقام 9,8,7,6,5,4,3,2,1 بدون تكرار أي عدد ؟

13. كم ترتيب يمكن تكوينه من اربعة انواع من الاشجار كل منها مكون من شجرتين ؟

14. اوجد P_2^5 و P_1^{10}

15. بين صحة العلاقات الآتية:

a) $C_{n-r}^n = C_r^n$

b) $C_r^n + C_{r-1}^n = C_r^{n+1}$

c) $C_k^r = \frac{r}{k} C_{k-1}^{r-1}$

d) $C_k^{r-1} = (r-k) C_k^r$

16. جد قيمة N اذا كان: $C_{15}^n = C_{11}^n$, $C_{n-2}^n = 10$

17. ما هي عدد الكلمات المختلفة التي يمكن تكوينها من حروف كلمة (عربية)

أ. باخذها كل مرة. ب. باخذ ثلاثة منها في كل مرة.



18. في احدى الحفلات حضر 15 رجلا، 20 سيدة، يراد جلوس سبعة منهم

على منضدة يوجد على يمينها اربعة كراسي وعلى يسارها ثلاثة كراسي:

أ. فبكم طريقة يمكنهم الجلوس اذا كان جلوس السيدات فقط على

اليمين والرجال فقط على اليسار.

ب. بكم طريقة يمكنهم الجلوس اذا جلست سيدة معينة في اول

كرسي على اليمين وان يجلس رجل معين في اول كرسي على اليسار.

19. كاظم يمتلك ثلاثة اشياء ورياض يمتلك تسعة اشياء، جد عدد

الطرق التي يتمكنان بها من تبادل الاشياء فيما بينهما بشرط احتفاظ

كل منهما بالعدد الاصيل للاشياء التي كانت معه.

20 جد عدد الطرق التي يمكن بها اختيار سبع كرات بينها ثلاث كرات

حمراء من حقيبة تحتوي على ست كرات حمراء وخمس كرات بيضاء.

21. جد معامل X^3Y^4 في مفكوك كل مما يلي:

$$a)(X+2y)^7 \quad b)(X^3 + y^2)^3$$

22. اوجد مفكوك المقادير $(x+y)^5$ ، $(x-y)^6$ وبين صحة هذه

العلاقات عندما $X=2, Y=-1$.

23. جد كل من المقادير الآتية:

$$a) (2+\sqrt{3})^4 + (2-\sqrt{3})^4 \quad b) \left(1+\frac{1}{n}\right)^5 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^5, n \neq 1$$

$$c) (1.02)^4 - (0.98)^4$$

24. اكتب الحد الخامس عشر في مفكوك $(A+B)^{32}$ بالصورة العامة.

إذا كان معامل الحدين السادس والسادس عشر في مفكوك $(x+y)^n$

متساويين جد قيمة n .





الفصل الثاني المتجهات والمصفوفات والمحددات

2-1 المتجه (Vector)

2-2 المصفوفات (Matrices)

2-3 المحددات (Determinants)

2-4 تطبيقات المصفوفات والمحددات



المتجهات والمصفوفات والمحددات

2-1 المتجه [Vector]

هي مجموعة من المقادير الكمية تمثل مركبات ويمثل كل منها شيئاً يختلف عن الآخر.

فمثلاً الأعداد (2,3,7,1,9) تمثل موجهها ذا خمسة أبعاد وتدعى تلك الأعداد بمركبات المتجه.

مثال 2-1

لو كان لدينا صندوق على شكل متوازي مستطيلات طوله 3 متر وعرضه 2 متر وأرتفاعه 3 متر فيمكن أن نعبر عن الأبعاد الثلاثة بالمتجه $[3 \ 2 \ 3]$.

يرمز للمتجه بحرف كبير (A, B, ...) ولكل من مركباته بحرف صغير مع رقم يطلق عليه (دليل) الذي يعين ترتيبه في المتجه مثل

$$y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]$$

هو متجه ذو البعد n.

2-1-1 أنواع المتجهات

2-1-1-1 المتجه العمودي (Column Vector)

هو مجموعة من أعداد حقيقية مرتبة في عمود واحد، فالمتجه A

العمودي التالي من المرتبة n يكتب بالشكل

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

2-1-1-2 المتجه الصفّي (Row Vector)

هو مجموعة من أعداد حقيقية مرتبة في وصف واحد فالمتجه B

الصفّي التالي من الرتبة n يكتب بالشكل

$$B = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n]$$

2-1-1-3 المتجه الصفري (Zero Vector)

هو المتجه الصفّي أو العمودي الذي كل مركبة من مركباته تساوي

صفر ويرمز له بـ 0 .

لا يوجد هناك فروق جوهرية بين المتجهات الصفية أو العمودية



سوى طريقة التعبير، إذ أن جميع العمليات الجبرية التي تنطبق على المتجهات الصفية، تطبق على المتجهات العمودية أيضاً.

تعريف: - المتجهات المتساوية

ليكن $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ و $Y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$ متجهين من نفس الرتبة n فإن $X = Y$ إذا وفقط إذا كانت:

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2 \ \dots, x_n = y_n$$

مثال: 2-2

إذا كان $A = [10/4, -3]$, $B = [2 \frac{1}{2}, -3]$, $C = [2, -3]$ فإن $B = A$

مثال: 2-3

جد قيمة X, Y إذا كان $[2x \ 6 \ 9] = [8 \ 6 \ 3y]$

$$2x = 8 \implies x = 4$$

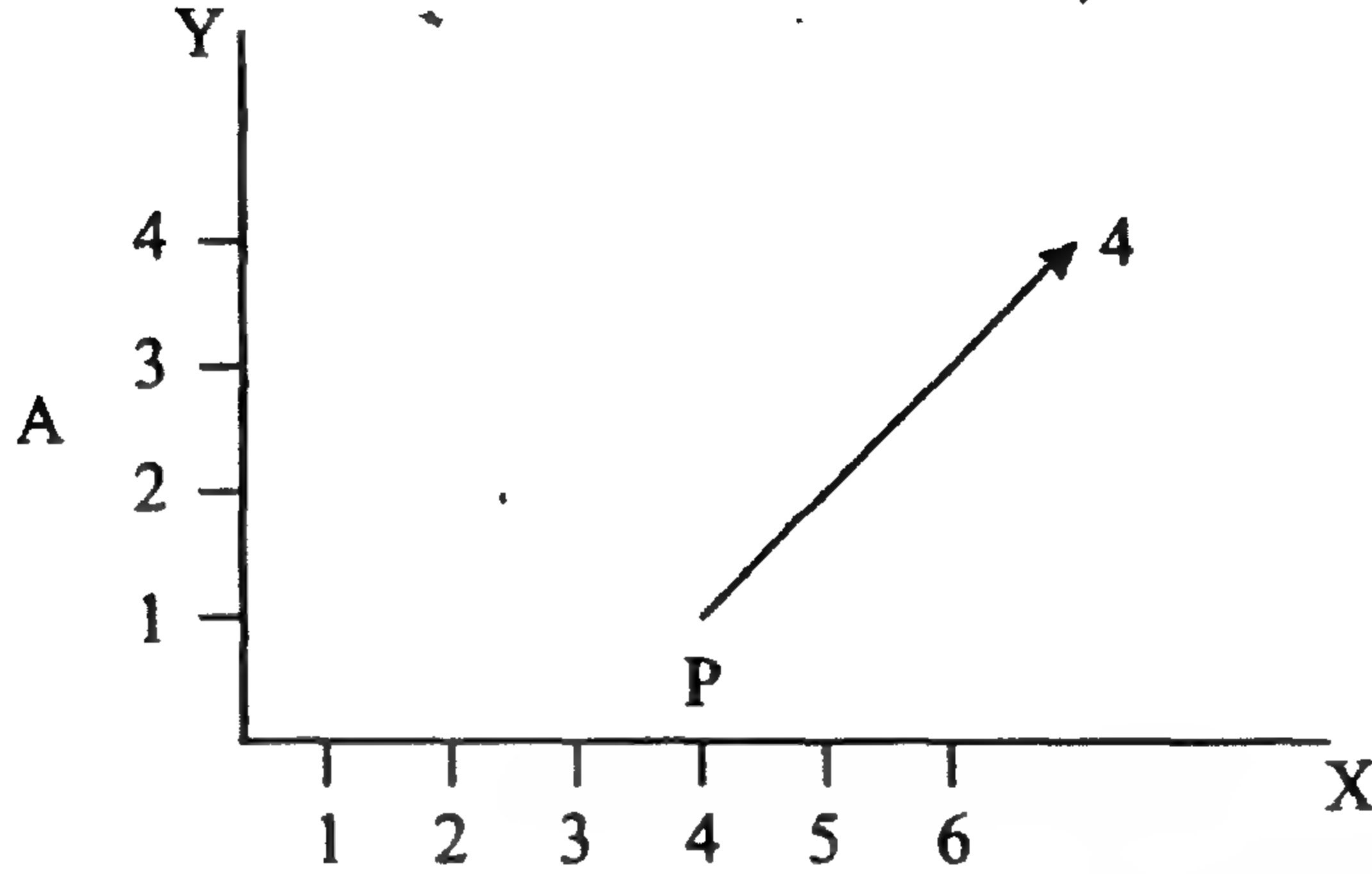
$$9 = 3y \implies y = 3$$

2-1-2 تمثيل المتجهات:

يتم تمثيل المتجه من خلال نقطة البداية ونقطة النهاية ورسم خط مستقيم بين النقطتين، ويعتمد ذلك على مركبات المتجه.

مثال 2-4 :

أرسم المتجه الآتي $A = (X, Y)$ إذا كانت نقطة بداية $P(4,1)$ ونقطة نهايته $Q(6,4)$



3-1-2 جمع المتجهات Addition of Vectors

إذا كان $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$, $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]$

متجهين من نفس الرتبة n فيعرف التجميع $A + B$ بأنه المتجه

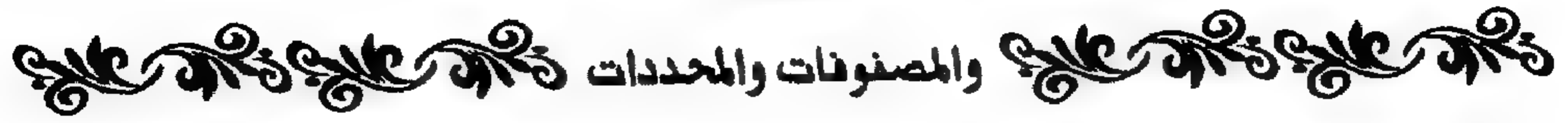
$$A + B = [a_1 + b_1 \ a_2 + b_2 \ \dots \ a_n + b_n]$$

أي جمع المركبات المتناظرة لكلا المتجهين.

مثال 2-5

أوجد مجموع المتجهين $A = (2 \ 6 \ -1 \ 0)$, $B = (6 \ 1 \ 4 \ 2)$

$$A + B = [2 + 6 \ 6 + 1 \ -1 + 4 \ 0 + 2] = [8 \ 7 \ 3 \ 2]$$



لأي متجهين من نفس الرتبة A ، B ، تكون العلاقات الآتية

صحيحة

$$1. A + B = B + A$$

$$2. A + 0 = 0 + A = A$$

$$3. k(A+B) = kA + kB \quad \text{مقدار ثابت كمي}$$

$$4. 1.A = A$$

وإذا رمزنا ل $(-A)$ بالمتجه $(A)(-1)$ فإن

$$A + (-A) = 0$$

وبدلاً من كتابة $A + (-B)$ سوف نكتب $A - B$

مثال 2-6

أجمع كل من المتجهات $A = (2 \ 3)$ و $B = (-1 \ 1)$ ، وكذلك

$$C = (3 \ 1) \text{ و } D = (1 \ 2)$$

$$A + B = (2 \ 3) + (-1 \ 1) = (1 \ 4)$$

$$C + D = (3 \ 1) + (1 \ 2) = (4 \ 3)$$

2-1-4 ضرب المتجهات Product of two vectors

هناك نوعان لضرب المتجهات.

2-1-4-1 الضرب الكمي Dot product :

ليكن $A = (a_1 \dots a_n)$ ، $B = (b_1 \dots b_n)$ متجهين أفقيين فإن الضرب الكمي للمتجهين بالشكل $A.B$ تمثل مقداراً كمياً (عدد حقيقي) ويكتب كما يأتي:

$$A.B = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

ويجب أن يكون المتجهان من نفس الرتبة في الأبعاد.

للضرب الكمي خواص يمكن كتابتها بالشكل الآتي:

1. قانون التبادل أي أن

$$A.B = B.A$$

2. إذا كانت A, B, C ثلاث متجهات فإن:

$$A.(B + C) = A.B + A.C = (B + C) A$$

3. إذا كانت X عدد حقيقي فإن

$$(XA).B = X(A.B) = A.XB$$

4. إذا كان $A = 0$ موجه صفري فإن

$$A.A = 0$$



5. ليكن h, k عددين حقيقيين وإن A, B متجهين من نفس الرتبة

فإن:

a) $k(A + B) = kA + kB$

b) $(k + h) A = kA + hA$

مثال 2-7

إذا كان $V_1 = [-4 \ 11 \ 0]$ ، $V_2 = [5 \ 2 \ -1]$ ، $V_3 = [7 \ -18 \ 3]$

وإن $k_1 = 4$ ، $k_2 = 3$ ، $k_3 = 7$ أوجد

أ. التركيب الخطي التالي

$$k_1 V_1 + k_2 V_2 + k_3 V_3$$

ب. $k_2 (V_1 + V_2)$

ج. $(k_1 + k_2) V_3$

د. $V_1 \cdot V_2$

هـ. $k_1 (V_1 \cdot V_3)$

الحل:

$$\begin{aligned} V &= 4(-4 \ 11 \ 0) + 3(5 \ 2 \ -1) + 7(7 \ -18 \ 3) \\ &= (-16 \ 44 \ 0) + (15 \ 6 \ -3) + (49 \ -125 \ 21) \\ &= (48 \ -95 \ 18) \end{aligned}$$



$$\text{ب. } k_2 (V_1 + V_2) = 3[(-4 \ 11 \ 0) + (5 \ 2 \ -1)]$$

$$= 3[1 \ 13 \ -1] = [3 \ 39 \ -3]$$

$$(k_1 + k_2) V_3 = (3 + 7) (7 \ -18 \ 3)$$

$$= 10 (7 \ -18 \ 3) = (70 \ -180 \ 30)$$

$$\text{د. } V_1 \cdot V_2 = (-4 \ 11 \ 0) \cdot (5 \ 2 \ -1)$$

$$= (-20 + 22 + 0) = 2$$

$$\text{هـ. } K_1 (V_1 \cdot V_3) = 4 (-4 \ 11 \ 0) \cdot (5 \ 2 \ -1)$$

$$= (-16 \ 44 \ 0) \cdot (5 \ 2 \ -1)$$

$$= (-80 \ 88 \ 0)$$

تعريف: إذا كان هناك تركيب خطي للمتجهات V_1, V_2, \dots, V_m بالمعاملات k_1, \dots, k_m مساوية للمتجه الصفري ولم تكن كل المعاملات أصفار فعندئذ يقال للمتجهات V_1, \dots, V_m إنها معتمدة خطياً (Linearly dependent) وإلا فهي مستقلة خطياً (Linearly independent) بمعنى آخر أن المتجهات V_1, \dots, V_m مستقلة خطياً إذا وفقط إذا

أستوفت الشروط

$$k_1V_1 + k_2V_2 + \dots + k_mV_m = 0$$

$$\implies k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$$

مثال 2-8

إذا كانت $v_1 = (110, 90)$ ، $v_2 = (4, 1)$ ، $v_3 = (2, 3)$ واذا اخذنا

المعاملات $k_1 = -1$ ، $k_2 = 15$ ، $k_3 = 25$.

$$\begin{aligned} v &= k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = -1(110 \ 90) + 15(4 \ 1) + 25(2 \ 3) \\ &= (-110 \ -90) + (60 \ 15) + (50 \ 75) = (0 \ 0) \end{aligned}$$

وعليه فإن المتجهات v_1, v_2, v_3 معتمدة خطياً

مثال 2-9

بين ان المتجهات التالية مستقلة خطياً

$$v_1 = [1 \ 0 \ 2] \quad v_2 = [0 \ -1 \ 3] \quad v_3 = [-2 \ 0 \ 1]$$

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$$

$$k_1(1 \ 0 \ 2) + k_2(0 \ -1 \ 3) + k_3(-2 \ 0 \ 1) = 0$$

$$(k_1 \ 0 \ 2k_1) + (0 \ -k_2 \ 3k_2) + (-2k_3 \ 0 \ 1k_3) = 0$$

$$k_1 - 2k_3 = 0 \quad \text{----- (1)}$$

$$-k_2 = 0 \quad \text{----- (2)}$$

$$2k_1 + 3k_2 + k_3 = 0 \quad \text{----- (3)}$$

المصفوفات والمحددات

يتضح من معادلة (2) ان $k_2=0$ وبالتعويض في المعادلتين (1) و (3)

ينتج

$$k_1 - 2k_3 = 0 \quad \text{----- (1)}$$

$$2k_1 + k_3 = 0 \quad \text{----- (3)}$$

بضرب معادلة (3) بـ (2) ينتج:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 - 2k_3 = 0 \\ 4k_1 + 2k_3 = 0 \end{array} \right. \text{ بالجمع}$$

$$5k_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_3 = 0$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0 \quad \text{أي ان}$$

فان المتجهات الثلاث v_1, v_2, v_3 مستقلة خطيا.

تعريف: ليكن (A) متجه من الرتبة (n) ، فتعرف القيمة $\|A\|$ أو

طول (A) والتي يرمز لها كما يأتي:

$$\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

مثال 10-2

إذا كان

$$\|A\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{25} = 5$$



تعريف: يقال للمتجه u متجه الوحدة او الواحدى (Unit Vector)

$$\|u\| = 1 \text{ اذا كان}$$

مثال 11-2

$$u = \left[\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{6} \quad \frac{2}{3} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{6} \right] \text{ فان}$$

$$\|u\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{36} + \frac{4}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{36}{36}} = 1$$

وعليه فان u متجه الوحدة .

2-1-4-2 ضرب الاتجاهى (Cross Products):

اذا كان $A = (a_1, a_2, a_3)$ وان $B = (b_1, b_2, b_3)$ فان الضرب الاتجاهى

للمتجهين A, B هو متجه يكتب بالشكل الآتى:

$$A \times B = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \text{ ----- (5-1)}$$

ويلاحظ ان الضرب الاتجاهى يعرف فقط عندما يكون المتجهين من

الرتبة (3)



وإذا تم التعبير عن المتجهين A, B بالشكل الآتي:

$$A = a_1X + a_2Y + a_3Z$$

$$B = b_1X + b_2Y + b_3Z$$

فان الضرب الاتجاهي يمكن التعبير عنه بالشكل الآتي:

$$A \times B = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)X + (a_3b_1 - a_1b_3)Y + (a_1b_2 - a_2b_1)Z$$

والذي يمثل ناتج محدد ثلاثي ، والذي سيتم توضيح طريقة ايجاده في موضوع المحددات ضمن هذا الفصل.

مثال 2-12

اوجد ناتج الضرب الاتجاهي للمتجهين $A=(1 \ 2 \ -1)$ و $B=(-2 \ 2 \ 2)$

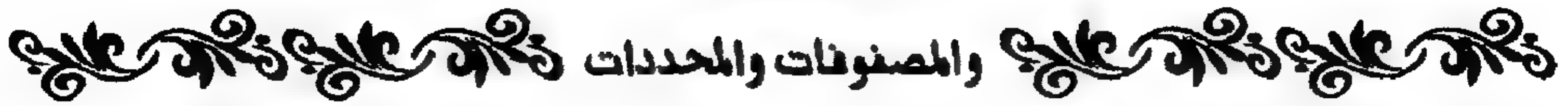
$$a_1=1 \quad a_2=2 \quad a_3=3 \quad b_1=-2 \quad b_2=2 \quad b_3=2$$

ويتطبيق المعادلة (5-1) السابقة نحصل على

$$\begin{aligned} A \times B &= [2(2) - (-1)(2), (-1)(-2) - (1)(2), (1)(2) - (2)(-2)] \\ &= [4 + 2, 2 - 2, 2 + 2] \\ &= [6 \ 0 \ 6] \end{aligned}$$

مثال 2-13

اوجد $B \times A$ اذا كان $B=(2 \ 0 \ -1)$ و $A=(1 \ -1 \ 2)$



$$A \times B = [(-1)(-1) - (2)(1), (2)(2) - (1)(-1), (1)(0) - (-1)(2)] \\ = [3 \ 5 \ 2]$$

2-2 المصفوفات [Matrices]

استعملت المصفوفات لأول مرة في حل مجموعة المعادلات الخطية ثم توسع استعمالها كثيرا في مجالات التخطيط للعمليات الصناعية في الانتاج والتسويق كما انها اصبحت مهمة في مواضيع الميكانيك والفيزياء والهندسة والحاسبات الالكترونية وبحوث العمليات وغيرها من العلوم. هناك حالات كثيرة يكون فيها من الطبيعي تقديم المعلومات بشكل جداول ومن امثلة ذلك الجدول التالي:

قسم أنظمة الحاسبات	قسم الحاسبة	قسم الإحصاء	
40	50	15	طلاب
22	60	20	طالبات

اذ ان هذا الجدول يمثل عدد الطلاب والطالبات في الصف الثاني موزعين حسب ثلاثة أقسام، ومن الممكن ان نرتب هذا الجدول بالشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix} 15 & 50 & 40 \\ 20 & 60 & 22 \end{bmatrix}$$



والذي يسمى بالمصفوفة (Matrix).

أي اننا يمكن ان نعرف المصفوفة كما ياتي:

المصفوفة: هي مجموعة اعداد او كميات حقيقية مرتبة في صفوف واعمددة وتكون محصورة بين قوسين.

للمصفوفة سعة (size) يمثل عدد الصفوف \times عدد الاعمدة. فالمصفوفة السابقة ذات سعة (3×2) أي مكونة من صفين وثلاثة اعمدة.

ويمكن ان نرمز للمصفوفة بحرف كبير ، فالمصفوفة العامة ذات السعة $(n \times m)$ تكتب بالصورة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

لقد رمزنا لكل عنصر بحرف صغير (a) مع رقمين الى الاسفل منه يعرفان بالدليلين الاول منها يدل على رقم الصف الذي يقع فيه العنصر والثاني يدل على رقم العمود الذي يقع فيه. فمثلا (a_{35}) العنصر الذي يقع في الصف الثالث والعمود الثاني . وعادة يرمز للعنصر العام بـ (a_{ij}) الذي يقع في الصف (i) والعمود (j) .



يمكن كتابة المصفوفة العامة (A) بالصورة المختصرة التالية

$$A = [a_{ij}], m \times n \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

فالمصفوفة التالية

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 17 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 1 \\ 7 & 4 & -1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

ذات السعة (5×3) لأنها تتكون من ثلاثة صفوف وخمسة اعمدة ،
وان العنصر الذي يقع في الصف الثاني والعمود الرابع هو (-3)

تعريف: يطلق على المصفوفتين $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ متساويتين
(equal matrices) $A = B$ اذا وفقط اذا كانا من نفس الرتبة وان كل
عنصر من الاولى يساوي العنصر المناظر له في الثانية أي

$$a_{ij} = b_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

مثال 2-14

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & \sqrt{9} \\ \sqrt{36} & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

اذا كان

فان $B \neq A$ لأنها ليسا من نفس الرتبة ولكن $B = C$

أوجد قيم كل من Z, Y, X إذا كان

$$\begin{pmatrix} 2 & X \\ 2 & 2Y+1 \\ -5Z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -7 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = 5, \quad 2Y + 1 = -7 \Rightarrow 2Y = -8 \Rightarrow Y = -4, \quad -5Z = 10 \Rightarrow Z = -2$$

2-2-1 أنواع المصفوفات:

هناك أنواع عديدة من المصفوفات سنذكر أغلبها :

1. المصفوفة العمودية (Column Matrix):

هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط فمثلا

مصفوفة عمودية ذات سعة (1×4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. المصفوفة المربعة (Square Matrix)

إذا كانت عدد الصفوف في المصفوفة مساوية لعدد الأعمدة أي $(m = n)$

تسمى بالمصفوفة المربعة ذات السعة (n) مثل المصفوفة (A) التالية:



$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & -7 \\ 8 & -11 & 5 \\ -13 & 32 & 10 \end{pmatrix}$$

وان العناصر $(a_{nn}, \dots, a_{22}, a_{11})$ في المصفوفة المربعة تسمى بعناصر القطر الرئيسي، وان مجموع عناصر القطر الرئيسي يسمى اثر (Trace) المصفوفة (A) .

أي ان :

$$\text{Trace}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

للمصفوفة السابقة فان

$$\text{Trace}(A) = 9 - 11 + 10 = 8$$

1. المصفوفة الصفية (Row matrix)

هي المصفوفة المكونة من صف واحد فقط مثل:

هي مصفوفة ذات سعة (4×1) .

$$B = [2 \ 6 \ -1 \ 4]$$

2. المصفوفة الصفرية (Zero Matrix)

هي المصفوفة التي كل عنصر من عناصرها هو الصفر ويرمز لها

ب (0) .



3. المصفوفة المتماثلة (Symmetric Matrix)

هي مصفوفة مربعة يكون فيها عناصر الثلث العلوي مساوية لعناصر الثلث السفلي، أي ان $a_{ij} = a_{ji}$ لجميع قيم i, j . وعند تبديل عناصر الصفوف بعناصر الأعمدة لا تتغير المصفوفة .

مثال 2-16

المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة متماثلة لأن $a_{12} = a_{21} = 2$ ،

$$a_{23} = a_{32} = -5 \quad \text{وإن} \quad a_{13} = a_{31} = 3$$

تعريف: منقول المصفوفة (Transpose of Matrix)

إذا كانت (A) مصفوفة ذات سعة (n×m) ، فإن المصفوفة الناتجة من تبديل عناصر الصفوف بالأعمدة تسمى بمنقول المصفوفة ويرمز لها بـ (A^T) بسعة (m×n) .

مثال 2-17

اوجد مبدلة المصفوفة التالية

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 6 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

4. مصفوفة الوحدة (الواحدية) (Identity Matrix)

هي المصفوفة المربعة التي عناصر القطر الرئيسي فيها يساوي واحد
وبقية العناصر كلها اصفار ويرمز لها بـ (I_n) مثل :

هي مصفوفة واحدية سعتها (3×3)

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. المصفوفة القطرية (Diagonal Matrix)

هي مصفوفة مربعة فيها عناصر القطر الرئيسي تمثل اعداد وياقي
العناصر في المصفوفة تمثل الصفر تسمى بالمصفوفة القطرية ويرمز لها عادة
بـ (D) فمثلا المصفوفة (D) التالية هي مصفوفة قطرية ذات سعة (4×4) .

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$



ويمكن ان تكتب كما يلي

$$D = \text{diag} (2 \quad 3 \quad -1 \quad 6)$$

2-2-2 جمع المصفوفات (Sums of Matrices)

اذا كانت $A = (a_{ij})$ ، $B = (b_{ij})$ مصفوفتان ذات سعة $(n \times m)$

فان حاصل جمعها (طرحها) $B \mp A$ ، يعرف بانه المصفوفة $C = (c_{ij})$

ذات سعة $(n \times m)$ حيث ان كل عنصر فيها يمثل جمع (طرح) العناصر

المناظرة لكل من A, B أي أن

$$A \mp B = [a_{ij} \mp b_{ij}]$$

مثال 18-2

اذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

اذن

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -5 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$



2-2-3 قوانين الجمع للمصفوفات:

إذا كانت A, B, C مصفوفتان ذات سعة $(n \times m)$ فإن العلاقات

التالية صحيحة

$$1) A + B = B + A$$

$$2) A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$3) k(A + B) = kA + kB = (A + B)k \quad k \text{ كمية ثابتة}$$

$$4) A + 0 = 0 + A = A$$

$$5) A + (-A) = -A + A = 0$$

مثال 19-2

$$\text{إذا كان } A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ أحسب } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

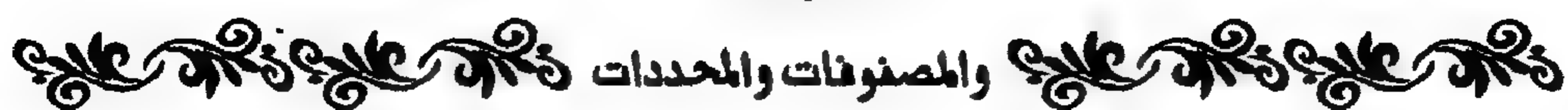
$$1) 2A, \quad 2) 4(A + B), \quad 3) 5(A - B), \quad 4) A - 2B$$

$$1) 2A = 2 \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2) 4(A + B) = 4 \left[\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \right] = 4 \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 24 \\ 24 & 16 \end{pmatrix}$$

$$3) 5(A - B) = 5 \left[\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \right] = 5 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 20 \\ -20 & 20 \end{pmatrix}$$

$$4) A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$



2-2-4 ضرب المصفوفات (Multiplication of Matrices)

يقال للمصفوفتين B, A انهما متوافقتان للضرب بالترتيب A, B اذا كان عدد اعمدة A يساوي عدد صفوف B ، ويعرف حاصل الضرب (AB) بانه المصفوفة $C = (C_{ij})$ عدد صفوفها يساوي عدد صفوف A وعدد اعمدتها يساوي عدد اعمدة B ، وان العنصر (C_{ij}) يساوي العنصر من حاصل ضرب الصف (i) للمصفوفة A (كمصفوفة صفية) في العمود (j) للمصفوفة B (كمصفوفة عمودية) وعندئذ تكتب

$$C = A \cdot B$$

فاذا كانت سعة A هي $(n \times m)$ وسعة B هي $(p \times n)$ فان سعة (C) هي $(p \times m)$ وان (A, B) غير متوافقين للضرب بالترتيب (BA) .

مثال 2-20

اذا كان

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 11 & 5 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

اوجد

1) AB

2) BA

$$1) A.B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 8 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 11 & 5 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 5(7) + 6(11) + 3(9) & 5(4) + 6(5) + 3(8) \\ 8(7) + 9(11) + 2(9) & 8(4) + 9(5) + 2(8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 35 + 66 + 27 & 20 + 30 + 24 \\ 56 + 99 + 18 & 32 + 45 + 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128 & 74 \\ 173 & 93 \end{bmatrix}$$

$$2) B.A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 11 & 5 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 8 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 7(5) + 4(8) & 7(6) + 4(9) & 7(3) + 4(2) \\ 11(5) + 5(8) & 11(6) + 5(9) & 11(3) + 5(2) \\ 9(5) + 8(8) & 9(6) + 8(9) & 9(3) + 8(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 67 & 78 & 29 \\ 95 & 111 & 43 \\ 109 & 126 & 43 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

2-2-5 قوانين ضرب المصفوفات:

إذا كانت A, B, C مصفوفات متوافقة للجمع والضرب فإن

$$1) A(B + C) = A.B + A.C$$

$$2) (A + B)C = A.C + B.C$$

$$3) A(B.C) = (A.B)C$$

$$4) A.B \neq B.A$$

$$5) A^r = A.A^{r-1}$$

إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ بين إن $A^2 - 4A - 5I = 0$

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$4A = 4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$5I = 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A - 5I = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

أوجد المصفوفة A حيث أن

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3 + a_{11} = 1 \rightarrow a_{11} = -2$$

$$4 + a_{21} = 0 \rightarrow a_{21} = -4$$

$$7 + a_{12} = 3 \rightarrow a_{12} = -4$$

$$-1 + a_{22} = 2 \rightarrow a_{22} = 3$$

$$2 + a_{13} = 2 \rightarrow a_{13} = 0$$

$$3 + a_{23} = 3 \rightarrow a_{23} = 0$$

$$5 + a_{14} = 1 \rightarrow a_{14} = -4$$

$$0 + a_{24} = -1 \rightarrow a_{24} = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & -4 \\ -4 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

مثال 2-23

اوجد حاصل الضرب $(A.B)$ ، $(B.A)$ للحالات الاتية

$$\text{One) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = [2(4) + 3(5) + 6(-1)] = (17)$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -4 \\ 10 & 15 & -5 \\ 12 & 18 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Two) } A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+15+6 \\ 4+9+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

لا يمكن إيجاد الضرب (B.A) لأن أعمدة B لا تساوي صفوف A.

مثال 2-24

$$\text{إذا كانت } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ أوجد } A^3$$

$$A^3 = A.A.A = A^2.A$$

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A.A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2-3 المحددات (Determinants)

يقابل كل مصفوفة مربعة $A = [a_{ij}]$ ذات السعة $(n \times n)$ والتي عناصرها اعداد حقيقية ، عدد حقيقي يسمى محدد المصفوفة (A) ، ويرمز له عادة بـ $\det(A)$ أو $|A|$ وقد يكتب كآلاتي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ويطلق على $|A|$ المحدد من المرتبة أو السعة (n) ، ويجدر الاشارة ان هذا الشكل المربع من الاعداد الحقيقية المحصورة بين مستقيمين راسيين ليس مصفوفة انها هو عدد ، الذي يقترن بالمصفوفة المربعة A .

2-3-1 المحدد الثنائي (The Determinant of Two)

يقصد بالمحدد الثنائي المحدد من المرتبة الثانية أي المتكون من صفين وعمودين ويكتب بالصيغة التالية:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

فتكون قيمته كما يلي

$$|A| = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي مطروحاً منه عناصر القطر الثانوي

اوجد قيم المحددات التالية

$$1. \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 1(5) = 8 - 5 = 3$$

$$2. \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -18 - (-8) = 18 + 8 = 26$$

2-3-2 المحدد الثلاثي The Determinant of Three

الصيغة العامة للمحدد من الرتبة الثالثة هي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ان مفكوك المحدد الثلاثي يتكون من ستة حدود ثلاثة منها بإشارة موجبة وثلاثة منها بإشارة سالبة ، ويمكن ايجاد قيمته بطريقة خاصة يمكن تلخيصها كما يلي:

1. نضع العمودين الاول والثاني الى يمين المحدد.
2. نأخذ الصف الاول ونضرب كل عنصر من عناصره في العنصرين الواقعين معه على نفس القطر ثم نجمع حواصل الضرب.
3. نأخذ عناصر الصف الثالث من المحدد ونضرب كل عنصر من

والمصفوفات والمحددات

عناصره في العنصرين الواقعين معه على نفس القطر ثم نجمع
حواصل الضرب.

4. نطرح ناتج الخطوة (3) من ناتج الخطوة (2) فنحصل على قيمة
المحدد.

مثال 2-26

اوجد قيمة المحدد الاتي:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 5 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 0 & 3 & 6 \\ 2 & 11 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= (5 \times 6 \times 1 + 7 \times 0 \times 2 + 5 \times 3 \times 11) - (2 \times 6 \times 5 + 11 \times 0 \times 5 + 1 \times 3 \times 7) \\ = 294 - 117 = 177$$

المصفوفات والمحددات

2-3-3 فك المحددات بواسطة العوامل المتممة

(Expanding the Determinant by the Cofactors)

وهي طريقة عامة لايجاد قيمة أي محدد من أي مرتبة وتحتاج الى المفاهيم الآتية:

المحدد (Minor) : لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة ذات سعة $(n \times n)$ فيعرف (M_{ij}) محدد العنصر (a_{ij}) الناتج من (A) بحذف عناصر الصف رقم (i) والعمود رقم (j) .

لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة ذات السعة (3×3) .

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{31}$$

$$|M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31}$$

العامل المتمم (Cofactor) : لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة ذات

أبعاد $(n \times n)$ فيعرف العامل المتمم للعنصر (a_{ij}) والذي يرمز له بـ (A_{ij})

بأنه محدد العنصر (a_{ij}) مضروباً في $(-1)^{i+j}$ فمثلاً:



$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{11} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{31}) = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}$$

وإذا رجعنا الى مفكوك المحدد الثلاثي نجد ان

$$|A| = a_{11}|M_{11}| + a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$$

وبذلك يمكن ايجاد قيمة المحدد (A) كمجموع حاصل ضرب عناصر أي صف او عمود في عواملها المتممة . وكما يلي عند اعتماد عناصر الصف الاول.

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

مع ملاحظة افضلية اختيار الصف او العمود الذي فيه اكثر اصفار.

مثال 2-27

استخدام طريقة العامل المتمم لايجاد قيم المحددات الآتية:

$$1- |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

بفك عناصر الصف الاول

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

والمصفوفات والمحددات

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 - 2(-34) + (-16) = 2 + 68 - 16 = 54$$

بفك عناصر العمود الرابع

$$2- |A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44}$$

$$= 0.A_{11} + 0.A_{24} + (-6)A_{34} + 0.A_{44}$$

$$= -6(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -6(7) = -42$$

2-4 خواص المحددات Properties of Determinants

فيما يلي اهم خواص المحددات

1. اذا كانت A مصفوفة مربعة ذات سعة (n×n) فان

$$|A^T| = |A|$$

2. اذا كانت (B) هي الحاصلة من (A) بابدال صفين (او عمودين)

كل محل الاخر فان:

$$|B| = -|A|$$

3. اذا تساوى صفان (او عمودان) في المصفوفة (A) فان

$$|A| = 0$$

4. اذا كانت (B) هي المصفوفة الحاصلة من ضرب جميع عناصر

الصف (او العمود) الواحد في الكمية الثابتة (k) من المصفوفة A فان:

$$|B| = k|A|$$

5. اذا كانت

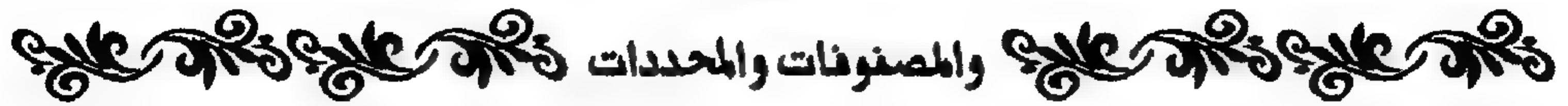
$$A = \begin{vmatrix} a & c+d \\ e & g+h \end{vmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d \\ e & h \end{vmatrix}$$

6. اذا كانت (B, A) مصفوفتين مربعيتين ذات سعة (n×n) فان

$$|A.B| = |A||B|$$

7. اذا كانت A مصفوفة مربعة قطرية ذات سعة (n×n) فان

$$|A| = a_{11}a_{22}.....a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$



8. اذا كانت A مصفوفة مربعة ذهت سعة (n×n) بالشكل الاتي

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

والتي تسمى مصفوفة المثلث السفلي (Lower triangular) حيث

تكون كل العناصر فوق القطر الرئيسي مساوية للصفر فان

$$|A| = a_{11}a_{22}.....a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

وتنطبق نفس الخاصية على مصفوفة المثلث العلوي

(upper triangular) حيث تكون العناصر تحت القطر الرئيسي مساوية

للصفر.

مثال 2-28

اذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$E = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

فان:

1.

$$|A| = 12 + 2 = 14$$

$$|A^1| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14$$

أي ان

$$|A| = |A^1|$$

وهو توضيح الخاصية الاولى

2. اذا كانت D مصفوفة ناتجة من ابدال العمودين الثاني والثالث في

المصفوفة C الواحد محل الاخر فان:

$$|C| = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 14 = 12$$

وان

$$\begin{aligned} |D| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)(-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 - 14 = -12 \end{aligned}$$

أي أن

$$|D| = -|C|$$

وهو توضيح الخاصية الثانية

3. في المصفوفة E يتساوى فيها العمودان الأول والثاني فإن

$$|E| = -2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2(7) + 2(7) = -14 + 14 = 0$$

وهو توضيح للخاصية الثالثة

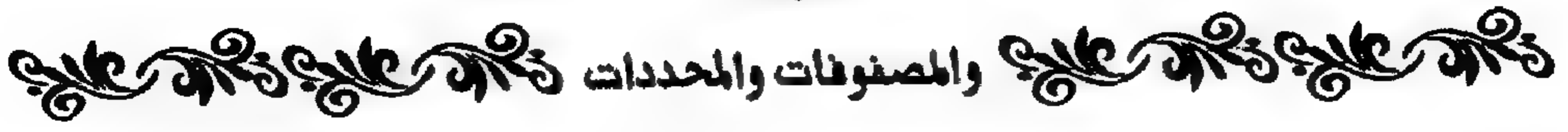
4. إذا ضربنا عناصر الصف الأول في المصفوفة A بالعدد (3) فإن

$$\begin{vmatrix} 12 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 36 + 6 = 42 = 3(12) = 3|A|$$

وهو توضيح للخاصية الرابعة

5. للمصفوفة B إن

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 14 = 6$$



ويمكن كتابة محددها كما يلي:

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 3+4 \\ 2 & 1+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|B| = (5 - 6) + (15 - 8) = -1 + 7 = 6$$

وهو توضيح للخاصية الخامسة

6. للمصفوفتين (A, B) فان

$$A.B = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 24 \\ 16 & 26 \end{vmatrix}$$

فان

$$|A.B| = (18)(26) - 16(24) = 468 - 384 = 84$$

$$|A| = 14 \quad |B| = 6$$

$$|A|.|B| = 14(6) = 84 = |A.B|$$

وهو توضيح للخاصية السادسة

$$7. \text{ للمصفوفة } D \text{ فان } |D| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 * 6 = 30 \text{ وحسب}$$

الخاصية 7 فان

$|D| = d_{11}d_{22}d_{33} = 5 * 6 * 1 = 30$ وهو توضيح للخاصية السابعة .

8. للمصفوفتين F,G فان

$$|F| = f_{11}f_{22}f_{33} = 1 * 3 * 2 = 6$$

$$|G| = g_{11}g_{22}g_{33} = 5 * 1 * 2 = 10$$

وعند ايجاد قيم محدد المصفوفتين بطريقة العوامل المتمة فان

$$|F| = 1 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 * 6 = 6$$

$$|G| = 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 5 * 2 = 10$$

وهو توضيح للخاصية الثامنة

2-4 تطبيقات المصفوفات والمحددات،

2-4-1 ايجاد معكوس المصفوفة (Inverse of Matrix)

2-4-1-1 المصفوفة المنفردة (The Singular Matrix):

إذا كانت قيمة محدد المصفوفة المربعة A يساوي صفرا فان

المصفوفة تسمى بالمصفوفة المنفردة ، وما عدا ذلك فتسمى المصفوفة غير المنفردة.

بين ان المصفوفة A هي مصفوفة منفردة وان B غير منفردة.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 15 + 20 + 4 - (5 + 24 + 10) = 39 - 39 = 0$$

فالمصفوفة A هي منفردة

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 8 + 4 + 9 - (24 + 6 + 2) = -1$$

فالمصفوفة B هي غير منفردة

2-4-1-2 المصفوفة المرافقة (The Ad joint Matrix):

لتكن A مصفوفة مربعة ذات سعة (n×n) فان المصفوفة

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

تسمى بالمصفوفة المرافقة لـ (A) ويرمز لها بـ adj(A)، وانها مصفوفة

مربعة وان (A_{ij}) يمثل مرافق العنصر (a_{ij}).

اوجد المصفوفة المرافقة للمصفوفة A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

وان منقول مصفوفة المتميات تسمى بالمصفوفة المرافقة أي ان

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -11 & 7 & 1 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & -11 & 5 \\ 6 & 7 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

إذا كانت A مصفوفة مربعة غير منفردة فإن لها معكوس واحد فقط (وحدانية معكوس المصفوفة) ويرمز له (A^{-1}) (يقرأ معكوس A) يحسب بالعلاقة الآتية:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}$$

وإذا كانت $(A$ و $B)$ مصفوفات مربعة من الرتبة (n) حيث ان $(AB=BA=I)$ فإن B تسمى معكوس A ($B = A^{-1}$) وان A تسمى معكوس B ($A = B^{-1}$).

مثال 2-31

جد معكوس المصفوفات الآتية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 4 - 6 = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

المصفوفات والمحددات

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 8 - 1 - 24 = -15$$

وبعد إيجاد متممات عناصر المصفوفة (B) نحصل على المصفوفة

المرافقة الآتية:

$$A_{dj}(B) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -8 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & -11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & -11 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{adj(B)}{|B|} = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & -11 \end{pmatrix}$$

وللتحقيق عن صحة معكوس تلك المصفوفات نجد:

$$A.A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

وكذلك بالنسبة للمصفوفة B فإن

$$B.B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & -11 \end{pmatrix}$$

$$B.B^{-1} = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -15 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ملاحظة:

ان معكوس المصفوفة القطرية غير المنفردة $\text{diag. } (K_1, K_2, \dots, K_n)$

هي مصفوفة قطرية تمثل $\text{diag. } (\frac{1}{K_1}, \frac{1}{K_2}, \dots, \frac{1}{K_n})$

مثال 2-32

اوجد معكوس المصفوفة التالية

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

2-4-2 حل المعادلات الخطية [Solution of Linear Equations]

اذا كان لدينا منظومة المعادلات الخطية التالية التي تحوي على (n)

من المتغيرات و (m) من المعادلات.

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n = b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n = b_2$$

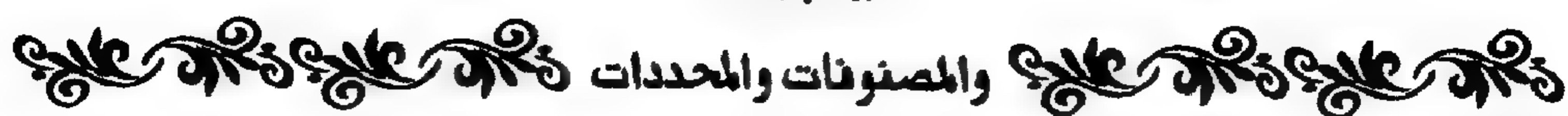
.

.

.

.

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n = b_m$$



ويمكن وضع تلك المنظومة بصيغة المصفوفات وكما يلي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

وبشكل أكثر إيجازاً $AX = B$

إذاً $A = [a_{ij}]$ هي مصفوفة المعاملات وأن

X هي مصفوفة المجاهيل

B هي مصفوفة ثوابت الطرف الايمن

هناك عدة طرق لحل مجموعة المعادلات الخطية وهي

2-4-2-1 طريقة كرامير (أو طريقة المحددات) (Gramers Rule):

لنفرض أن (A_i) إذاً $(i = 1, 2, \dots, n)$ مصفوفة نحصل عليها من

إبدال العمود (i) بعمود الثوابت b_i في الطرف الايمن لمجموعة

المعادلات، وإذا كانت $|A| \neq 0$ فإن للمجموعة $AX=B$ حل فريد هو

$$X_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

$$X_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

$$X_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

مثال 33-2

حل منظومة المعادلات الآتية بطريقة كرامير:

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 = 9$$

$$X_1 - 3X_2 - 2X_3 = -5$$

$$2X_1 + 7X_2 + 2X_3 = 7$$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 9 \\ -5 \\ 7 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 3(8) - 2(6) + 1(13) = 25$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \\ 7 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 9(8) - 2(4) + 1(-14) = 50$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 3(4) - 9(6) + 1(17) = -25$$



$$|A_3| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 1 & -3 & -5 \\ 2 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 3(14) - 2(17) + 9(13) = 125$$

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{50}{25} = 2$$

$$X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-25}{25} = -1$$

$$X_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{125}{25} = 5$$

2-4-2-2 طريقة معكوس المصفوفة:

بعد ان تكتب مجموعة المعادلات الخطية بصيغة المصفوفات بالشكل

$$AX = B$$

فان مصفوفة المجاهيل (X) يمكن ايجادها كما ياتي:

$$X = A^{-1} B, \quad |A| \neq 0$$

مثال 2-34

جد حل منظومة المعادلات الاتية بطريقة معكوس المصفوفة

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 = 18$$

$$X_1 - 2X_2 + 7X_3 = 4$$

$$2X_1 + 3X_2 - X_3 = 7$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

ولإيجاد معكوس المصفوفة (A) نستخرج مصفوفة العوامل المتممة

(A_{ij}) وكما يأتي:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 21 = -19$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 14) = 15$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - 3) = 6$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 6) = 0$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 2 = 23$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -(14 - 1) = -13$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7$$

$$|A| = 2(-19) + 3(15) + 1(7) = 14 \neq 0$$

$$\text{adj}(A) = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} -19 & 15 & 7 \\ 6 & -4 & 0 \\ 23 & -13 & -7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -19 & 6 & 23 \\ 15 & -4 & -13 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -19 & 6 & 23 \\ 15 & -4 & -13 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -19 & 6 & 23 \\ 15 & -4 & -13 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \frac{1}{14} [(-19)(18) + 6(4) + 23(7)] = -\frac{157}{14}$$

$$X_2 = \frac{1}{14} [(15)(18) + (-4)(4) + (-13)(7)] = \frac{163}{14}$$

$$X_3 = \frac{1}{14} [(7)(18) + 0(4) + (-7)(7)] = \frac{77}{14}$$

تمارين الفصل الثاني

1. إذا كان $U=(8,2,-1)$ ، $V=(3,7)$ اوجد

a) $U+3V$ ، b) $2U-V$ ، c) $U+V$

2. إذا كان $C=(3 \ 9 \ 2)$ ، $B=(3 \ -4 \ 5)$ ، $A=(-2 \ 0 \ 1)$ اوجد

$\|A-B\|$ ، $\|A+B\|$ ، $\|C\|$ ، $\|B\|$ ، $\|A\|$

3. اوجد قيم (X, Y) اذ ان

$$\begin{bmatrix} X \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ X+Y \end{bmatrix}$$

4. احسب قيم (X, Y, Z) اذ ان

$$X \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + Y \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$



5. بين ان المتجهات الاتية هي معتمدة خطيا ام غير معتمدة خطيا.

a) $v_1 = (0 \ 3)$ $v_2 = (2 \ -1)$ $v_3 = (1 \ 2)$

b) $v_1 = (1 \ 2 \ 0)$ $v_2 = (0 \ -1 \ 2)$ $v_3 = (2 \ 0 \ 1)$

6. اوجد قيم (X, Y, Z) التي تجعل المعادلة الاتية صحيحة

$$\begin{bmatrix} X+2 & 5 \\ Y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2X-3 & 5 \\ 6-Y & 1+2Z \end{bmatrix}$$

7. اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ أوجد } A^3$$

8. اكتب المعادلات الاتية بصيغة المصفوفات

$$5X + 2 = -3Y$$

$$X - 6X = 3$$

9. اذا اعطيت

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

أحسب $A + B - 7I$



10. احسب قيم كل من (d, c, b, a) اذا كان

$$2 \begin{bmatrix} a & -b \\ 3c & -2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 1 \\ c & 3+2d \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -1 & a-b \\ a+b & 2c \end{bmatrix}$$

11. احسب قيمة X التي تحقق المعادلة الاتية

$$\begin{bmatrix} X & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

12. اذا اعطيت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B + D = 0 \quad \text{إذ إن} \quad D = \begin{bmatrix} p & a \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix} \quad \text{اوجد}$$

13. احسب قيم المحددات الاتية

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 11 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$



14. بين صحة المعادلة $|A.B| = |A||B|$ اذا كان

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

15. للمصفوفات الآتية احسب المصفوفة المرافقة ومعكوس

المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

16. لمنظومات المعادلات الآتية استخدم طريقة كرامير لايجاد

حلولها

a) $X_1 + 2X_2 + X_3 = 3$

$$2X_1 + X_2 + 2X_3 = -1$$

$$2X_1 + X_2 + 2X_3 = -5$$

b) $X_1 + X_2 + X_3 = 2$

$$X_1 - X_2 + X_3 = 6$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = -4$$

c) $3X_1 - X_3 + 4X_3 = 18$

$$2X_1 + 6X_2 + 4X_3 = 11$$

$$X_2 - 3X_1 + 6X_3 = 7$$



$$d) -2X_1 + 3X_2 + X_3 = 3$$

$$2X_2 + X_1 + X_3 = 1$$

$$3X_3 - X_2 - X_1 = 6$$

$$e) X_1 + X_2 + X_3 = 4$$

$$2X_2 + 3X_1 + 4X_3 = 0$$

$$3X_1 + 6X_2 + 9 = -10X_3$$

17. استخدام معكوس المصفوفة في حل منظومات المعادلات

آلاتية:

$$a) X_1 + X_2 + 3X_3 = 8$$

$$2X_1 + X_2 + 2X_3 = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + X_3 = 0$$

$$b) 8X_1 + 6X_2 + 10X_3 = 46$$

$$5X_1 + 4X_2 + 2X_3 = 25$$

$$6X_2 + 25X_1 + 4X_3 = 15$$





الفصل الثالث

التفاضل Differentiation

1-3 العلاقات Relations

2-3 الدوال Functions

3-3 الصيغ غير المعرفة Indeterminate forms

3-4 الغاية للدالة Limit of function

3-5 المشتقات وقوانينها

3-6 تفاضل الدوال غير الجبرية

3-7 التفاضل الضمني Implicit derivative

3-8 الاشتقاق العلى Higher derivative

3-9 تطبيقات التفاضل

3-10 الاستمرارية Continuity

3-11 التفاضل الجزئي partial differentiation





التفاضل Differentiation

3 – العلاقات والدوال

1.3 العلاقات Relations

لتكن A, B مجموعتين غير خاليتين وان $P(a, b)$ تعبير مفتوح ذو متغيرين a, b حيث $a \in A$ وان $b \in B$ فنقول على ان $(A, B, P(a, b))$ علاقة ثنائية من المجموعة A الى B . ويمكن ان نرمز لها بحرف واحد هو R وتكتب $R(A, B, P(a, b))$

مثال 3-1

اذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4, 5, 6\}$ فان $R_1 = \{A, B, a < b\}$

فتكتب العلاقة بالشكل $R_1 = (\{1, 2, 3\}, \{2, 4, 5, 6\}, <)$

3.1.1 بيان العلاقة

اذا كانت $R\{A, B, P(a, b)\}$ ((علاقة ما فان مجموع الازواج المرتبة

(a, b) تدعى بيان العلاقة R ويرمز لها بـ R^* اي ان

$$R^* = \{(a, b), a \in A, b \in B, aRb\}$$



مثال 2-3:

إذا كانت $A = \{2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{3, 6, 7, 10\}$ وان aRb معرفة بـ $(\frac{a}{b})$

فان $R = (A, B, \frac{a}{b})$ وان $R^* = \{(2, 6), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (5, 10)\}$

مثال 3-3

لتكن $A = \{2, 3, 5, 7\}$ و $B = \{4, 6, 8\}$ وان العلاقة R من A الى B

معرفة بمايلي aRb اذا وفقط اذا $b = a + 1$ فان $R^* = \{(3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$

مثال 3-4

إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 16, 25\}$ وان aRb اذا وفقط اذا

$b = a^2$ فان

$$R^* = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$$

2.3 الدوال Functions

لتكن f علاقة من المجموعة A غير الخالية الى المجموعة B فيقال ان f

دالة من A الى B اذا اقترن مع اي عنصر في A عنصر وحيد في B ، ويعبر

عن ذلك كالآتي



$$A \xrightarrow{f} B$$

$$f : A \rightarrow B$$

او

وتعتبر f دالة من A الى B اذا استوفت الشروط الاتية :

1. علاقة من A الى B وبذلك $f \subset A \times B$

2. لكل $a \in A$ يوجد $b \in B$ بحيث $(a, b) \in f$

3. اذا كانت $(a, b) \in f, (a, b') \in f$ فان $b = b'$

اذا كانت f دالة من A الى B وكان $(a, b) \in f$ فاننا نكتب $b = f(a)$ ويطلق على $f(a)$ صورة العنصر a بفعل الدالة f كما يقال ايضاً ان $f(a)$ قيمة الدالة f في a .

واذا كانت $f : A \rightarrow B$ فتسمى المجموعة A منطلق (Domain) الدالة f كما تسمى المجموعة B مستقر (Co domain) الدالة f ، ويطلق على المجموعة التي تتكون من صورة كل عنصر من عناصر المجموعة A بفعل f مدى (Range) الدالة ويرمز له بـ $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$.

تعريف: يقال للدالتين $f : A \rightarrow B$ و $g : A \rightarrow B$ انهما متساويتان

وتكتب $f=g$ اذا كان $f(a)=g(a)$

$\forall a \in A$ واذا وجد على الاقل عنصر واحد في A بحيث

$f(a) \neq g(a)$ فان $f \neq g$.

3.3 الصيغ غير المعرفة Indeterminate forms

ان كل من $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{\infty}, \frac{\infty}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$ تسمى صيغ غير معرفة، تظهر

هذه الصيغ نتيجة لتعويض اعداد معينة في بعض الدوال وتركيباتها.

3.4 الغاية للدالة Limit of function

يعتبر مفهوم الغاية من اهم المفاهيم في التفاضل والتكامل وفي كثير

من فروع الرياضيات ولاجل ان نقرب مفهوم الغاية تأمل المثال الاتي

مثال 3-5

تأمل الدالة $f: R \rightarrow R$ بحيث ان لكل $x \in R$

$$f(x) = x^2 - 1$$

فلو اعطينا قيماً لـ x اقل بقليل من العدد 2 واكثر بقليل من العدد 2.

فالجداول الاتي الذي نلاحظ فيه ان قيمة الدالة f تقترب جداً الى العدد 3

كلما اقتربت قيمة x من العدد 2.



$X < 2$	$f(x)$	$x > 2$	$f(x)$
1.7	1.89	2.3	4.29
1.9	2.61	2.1	3.41
1.99	2.96	2.001	3.004
1.9999	2.9996	2.0001	3.0004

فيمكن القول ان غاية الدالة $f(x) = x^2 - 1$ في العدد 2 هي 3 .

مثال 3-5

تأمل الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ عندما $x \neq 1$

نلاحظ انه عندما $x = 1$ يكون الطرف الايسر $\frac{0}{0}$ وهذه صيغة غير معرفة ، هذا يعني ان $f(1)$ صيغة غير معرفة وعليه تكون الدالة f غير معرفة عندما $x = 1$ ، لنلاحظ قيم الدالة عندما تكون قيم x قريبة من 1 وذلك في الجدول التالي . اذ يتضح انه عندما يقترب x من العدد 1 فان غاية الدالة $f(x)$ تقترب من العدد 2 وهذا يعني انه على الرغم من ان الدالة غير معرفة عندما $x = 1$ فانها تقترب من العدد 2 عندما x تقترب من العدد 1 . يسمى العدد 2 غاية الدالة f عندما تقترب من 1 ويرمز له بما يلي

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$



$X < 1$	$f(x)$	$x > 1$	$f(x)$
0.5	1.5	1.5	2.5
0.8	1.8	1.2	2.2
0.9	1.9	1.1	2.01
0.99	1.99	1.001	2.001
0.999	1.999	1.0001	2.0001

ان مفهوم الاقتراب يعني بصورة ادق ان الفرق بين $f(x)$ والعدد 2

يقل كلما قل الفرق بين x والعدد 1 وبصورة عامة فان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ اذ

ان L, a اعداد حقيقية ، تعني انه كلما قل الفرق بين العددين $f(x), L$ يقل

الفرق بين العددين x, a ويعبر عن ذلك بصيغة رياضية دقيقة كما في

التعريف الاتي

تعريف: يقال ان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ اذا وفقط اذا تحقق الشرط الاتي :

لكل عدد حقيقي $\epsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي $\delta > 0$ بحيث ان

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

وهذا يعني انه عندما تكون x قريبة من a فان $f(x)$ تكون قريبة من L

مع ملاحظة ان الرمز ϵ يقرأ ايسلون وان الرمز δ يقرأ دلتا .

3.4.1 الغاية من اليسار والغاية من اليمين

في تعريف الغاية لاحظنا اقتراب المتغير من اليمين ومن اليسار وفي بعض الحالات تحتاج لاقتراب المتغير من اليمين فقط او من اليسار فقط وذلك يقودنا لتعريف غايتين جديدتين هما الغاية من اليسار والغاية من اليمين .

الغاية من اليسار:

يقال ان $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ اذا وفقط اذا تحقق الشرط الاتي

لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث ان

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| < \epsilon$$

الغاية من اليمين :

يقال ان $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ اذا وفقط اذا تحقق الشرط الاتي

لكل $\epsilon > 0$ هناك $\delta > 0$ بحيث ان

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L_2| < \epsilon$$

مثال 3-6 افرض ان

$$f(x) = \begin{cases} 6x-2 & \text{if } x > 1 \\ 5 & x = 1 \\ -x+5 & x < 1 \end{cases}$$



هل ان $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ لها وجود

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (6x - 2) = 6 - 2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x + 5) = -1 + 5 = 4$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$$

ولكن $f(1)=5$ اي ان الغاية لهذه الدالة ليس لها وجود .

3.4.2 بعض خواص الغاية

1. اذا كان $y=f(x)=c$ (c كمية ثابتة) فان:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

اذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ وان $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$

2. (k كمية ثابتة)



$$\lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot A$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \mp g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \mp \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \mp B$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}, B \neq 0$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{A} \quad \text{كمية حقيقية}$$

A

ملاحظة: لايجاد قيمة غاية اي دالة نبدا بتطبيق الخواص السابقة ثم نعوض عن المتغير بالقيمة التي تقترب فيها فاذا كانت النتيجة عدداً حقيقياً فان هذا العدد هو قيمة الغاية ، اما اذا كانت النتيجة صيغة غير معرفة فعندئذ يجب ازالة عدم التعريف وهناك طرق كثيرة منها

1. طريقة التحليل الى العوامل 2. طريقة الضرب بالمرافق

3. طريقة تبديل المتغير



اوجد غايات كل من الدوال الآتية:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 2x + 5) = \lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 2x + \lim_{x \rightarrow 1} 5$$

$$= 3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 5 = 3(1) + 2(1) + 5 \\ = 10$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 1) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 4 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 1$$

$$= 4 - 4(2) + 1 = -3$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} (5x + 6) = 5(0) + 6 = 6$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -2} (4x - 2) = 4(-2) - 2 = -10$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 1}{x + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (3x^2 + 1)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x + 2)} = \frac{3(3^2) + 1}{3 + 2} = \frac{27 + 1}{5} = \frac{28}{5}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$



$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x + 5}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x + 5}} = \sqrt{\frac{1 + 1}{1 + 5}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+4) - 4}{x(\sqrt{x+4} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} \cdot \frac{3 + \sqrt{x^2 + 5}}{3 + \sqrt{x^2 + 5}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4 - x^2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{9 - (x^2 + 5)} = \lim_{x \rightarrow 2} (3 + \sqrt{x^2 + 5}) = 3 + 3 = 6$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{9x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x} - \frac{2}{x}}{\frac{9x}{x} + \frac{7}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2/x}{9 + 7/x} = \frac{3 - 0}{9 + 0} = \frac{1}{3}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{6x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2}} \quad \text{القسمة على اكبر أس}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{6 + \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{6 - \frac{3}{\infty} + \frac{4}{\infty}} = \frac{6 + 0 + 0}{6 - 0 + 0} = \frac{6}{6} = 1$$



$$13. \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{t^2}{t^2}}{\frac{t}{t^2} + \frac{1}{t^2}} = \frac{1}{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$14. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x + 0 = 2x$$

$$15. \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt{y^6} - 1}{\sqrt[3]{y^6} - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - 1}{y^2 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1)(y^2 + y + 1)}{(y-1)(y+1)}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2 + y + 1}{y + 1} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{2x^2 - 3x - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^3 - 3x^2) + (x - 3)}{(2x + 3)(x - 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2(x - 3) + (x - 3)}{(2x + 3)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 1)}{(2x + 3)(x - 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{2x + 3} = \frac{3^2 + 1}{6 + 3} = \frac{10}{9}$$

3.5 المشتقات وقوانينها:

3.5.1 مفهوم مشتقة الدالة:

المشتقة للدالة f هي دالة يرمز لها f' بحيث ان قيمتها في أي عدد (x)

هو:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

على ان تكون هذه الغاية موجودة.

وتقرأ $f'(x)$ (f prime of x) مشتقة الدالة f بالنسبة الى x وهناك

رموز اخرى تستعمل للتعبير عن مشتقة الدالة $y=f(x)$ بالنسبة الى x هي

$$y', \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx} f(x), Dx$$

ويقال للدالة $f(x)$ انها قابلة للاشتقاق او تفاضلية في العدد (a) اذا

كانت $f'(a)$ موجودة والا فهي غير قابلة للاشتقاق.

مثال 3-8:

جد مشتقة الدالة $f(x) = x^2 - 5x$ باستعمال التعريف ثم جد

$$f'(0), f'(3)$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta^2 x - 5x - 5\Delta x$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta^2 x - 5x - 5\Delta x - x^2 + 5x$$

$$= 2x\Delta x + \Delta^2 x - 5\Delta x$$

وبالقسمة على Δx ينتج:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x - 5$$

ويأخذ النهاية عندما $\Delta x \rightarrow 0$ نحصل على

$$f'(x) = 2x - 5$$

$$f'(0) = 2(0) - 5 = -5$$

$$f'(3) = 2(3) - 5 = 1$$

مثال 9-3:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ جد مشتقة الدالة}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)} = \frac{-1}{(x + \Delta x)x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$$



جد مشتقة الدالة التالية:

$$y = \sqrt{2x+1} \quad x \geq 0$$

$$y + \Delta y = \sqrt{2(x + \Delta x) + 1} = \sqrt{2x + 2\Delta x + 1} = (2x + 2\Delta x + 1)^{1/2}$$

$$\Delta y = (2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} - (2x + 1)^{1/2}$$

$$\Delta y = \left[(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} - (2x + 1)^{1/2} \right] \left[\frac{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x + 1)^{1/2}}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x + 1)^{1/2}} \right]$$

$$= \frac{2\Delta x}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x + 1)^{1/2}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x + 1)^{1/2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{(2x + 1)^{1/2} + (2x + 1)^{1/2}} = \frac{2}{2(2x + 1)^{1/2}} \\ &= (2x + 1)^{-1/2} \end{aligned}$$

3.5.2 قاعدة لوبيتال L'Hopital Rule

إذا كانت a عدد حقيقي وكانت f, g دالتين قابلتين للاشتقاق بحيث
 ان $f(a)=g(a)=0$ وان الغاية $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة فعندئذ

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال 10-3:

$$\text{احسب الغاية } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 - 5x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

نلاحظ ان $4x^4 - 5x^3 + 1$ تحقق شرط $f(1)=0$ كما ان $x^2 - 1$ تحقق
 شرط $g(1)=0$ وعليه فان الغاية ستكون

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{16x^3 - 15x^2}{2x} = \frac{16(1) - 15(1)}{2(1)} = \frac{1}{2}$$

كما ان هناك نتيجة لهذه القاعدة وهي :

إذا كانت f, g دالتين وكان a عدد حقيقي او ∞ او $-\infty$ بحيث ان
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ وان $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ موجودة فعندئذ

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



مثال 11-3

$$\text{جد الغاية } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{2x^2 + 4}$$

يمكن ملاحظة ان الغاية تحقق شروط النتيجة وعليه فانها تساوي

(بتطبيق النتيجة)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 2}{4x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

3.5.3 قوانين الاشتقاق:

1. اذا كان $f(x) = c$ اذ ان c ثابت حقيقي فان $f'(x) = 0$.

2. اذا كان n عدد صحيح موجب وكانت $f(x) = x^n$ فان

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

3. اذا كان c ثابتا وكانت f دالة قابلة للاشتقاق فان

$$\frac{d}{dy} [cf(x)] = c.f'(x)$$

4. لتكن $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق فان:

$$\frac{d}{dx} [f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

5. اذا كانت $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق فان

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f'(x).g(x) + g'(x)f(x)$$

6. اذا كانت $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق فان

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$
 بشرط ان

أي ان مشتقة الدالة الكسرية = $\frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتقة المقام} \times \text{البسط}}{\text{مربع المقام}}$

7. اذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق وان n عدد حقيقي فان

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} \frac{df}{dx}$$

8. اذا كان a ثابت و n عدد صحيح موجب فان:

$$\frac{d}{dx}(ax^{-n}) = -anx^{-n-1}$$

9. اذا كان a ثابتا فان

$$\frac{d}{dx}(ax) = a$$

10. اذا كانت $f(x) = x^{-n}$ حيث n عدد صحيح موجب فان

$$f'(x) = -nx^{-n-1}$$

مثال 12-3:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية

1. $y = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$

2. $f(x) = y = 5x^7 - 2x^6 + 3x^2 - 2x + 4$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 35x^6 - 12x^5 + 6x - 2$$

3. $y = 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$

4. $y = (3x^2 + 5x)(6x^3 - 2x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = (6x + 5)(6x^3 - 2x^2) + (18x^2 - 4x)(3x^2 + 5x)$$

5. $y = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$



$$6. y = \frac{x^4}{6x^2 - 2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(6x^2 - 2)4x^3 - x^4(12x)}{(6x^2 - 2)^2}$$

$$7. y = (7x^2 + 5)^4$$

$$y' = 4(7x^2 + 5)^3(14x) = 56x(7x^2 + 5)^3$$

$$8. f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x} = (x^2 - 3x)^{1/3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 3x)^{-2/3}(2x - 3)$$

$$9. f(x) = (6x^2 + \sqrt{x^3 - 2})^6 = [6x^2 + (x^3 - 2)^{1/2}]^6$$

$$f'(x) = 6[6x^2 + (x^3 - 2)^{1/2}]^5 \left[12x + \frac{1}{2}(x^3 - 2)^{-1/2} \cdot 3x^2 \right]$$

$$10. y = \left(\frac{6x^3 - 12}{15x^2 - 7} \right)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \left(\frac{6x^3 - 12}{15x^2 - 7} \right)^2 \cdot \frac{(18x^2)(15x^2 - 7) - (30x)(6x^3 - 12)}{(15x^2 - 7)^2}$$



$$11. y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{\sqrt{x}} + 10$$

$$y = 3x^{-1/3} - 5x^{-1/2} + 10$$

$$y' = 3\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3} - 5(-1/2)x^{-3/2} = -\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{5}{2\sqrt{x^3}}$$

$$12. y = \frac{3x^3}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{3x^3}{(4x^2+1)^{1/2}}$$

$$y' = \frac{(4x^2+1)^{1/2} \cdot 9x^2 - \frac{1}{2}(4x^2+1)^{-1/2} \cdot 8x \cdot 9x^2}{4x^2+1}$$

3.5.4 قاعدة السلسلة The chain rule

عندما لا تكون العلاقة بشكل مباشر من المتغيرين الاساسيين (x,y)

ولايجاد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ هناك حالتان هما:

أ. اذا كان متغير مثل z يقيم وسطهما بالعلاقة اي

$$y = f(z) , z = f(x)$$

فنستخدم القانون التالي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$



ب. اذا كان كل من y, x دوال لمتغير ثالث جديد z مثلاً أي

$$y = f(z) , x = f(z)$$

فنستخدم القانون التالي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dz}{dx/dz}$$

مثال 13-3:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال الآتية:

1. $y = 6z^3, z = 2x^2 - 3x$

$$\frac{dy}{dz} = 18z^2, \frac{dz}{dx} = 4x - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = (18z^2)(4x - 3)$$

2. $y = 4z^5, x = \frac{3}{z^2}$

$$\frac{dy}{dz} = 20z^4, \frac{dx}{dz} = -6z^{-3} = -\frac{6}{z^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{20z^4}{-\frac{6}{z^3}} = -\frac{10}{3}z^7$$

$$3. \quad y = \frac{5}{\sqrt{2z}} \quad z = \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \left(\frac{x}{x-2}\right)^{-1/2}$$

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{5}{2}(2z)^{-3/2}, \quad \frac{dz}{dx} = 1/2 \left(\frac{x}{x-2}\right)^{-1/2} \cdot \frac{(x-2)-x}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x-2}\right)^{-1/2} \cdot \frac{2}{(x-2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{2}(2z)^{-3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x(x-2)^3}} = -\frac{5}{2\sqrt{(2z)^3 x(x-2)^3}}$$

اوجد $\frac{dy}{dt}$ اذا كان

$$4. \quad x = \sqrt{t^3 + 1} \quad y = x^3 - 4x^2 + 6x$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(t^3 + 1)^{-1/2} \cdot 3t^2, \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x + 6$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = (3x^2 - 8x + 6) \frac{3}{2} \frac{t^2}{\sqrt{t^3 + 1}}$$

3.6 تفاضل الدوال غير الجبرية:

3.6.1 تفاضل الدوال المثلثية

Differentiation of trigonometric functions:

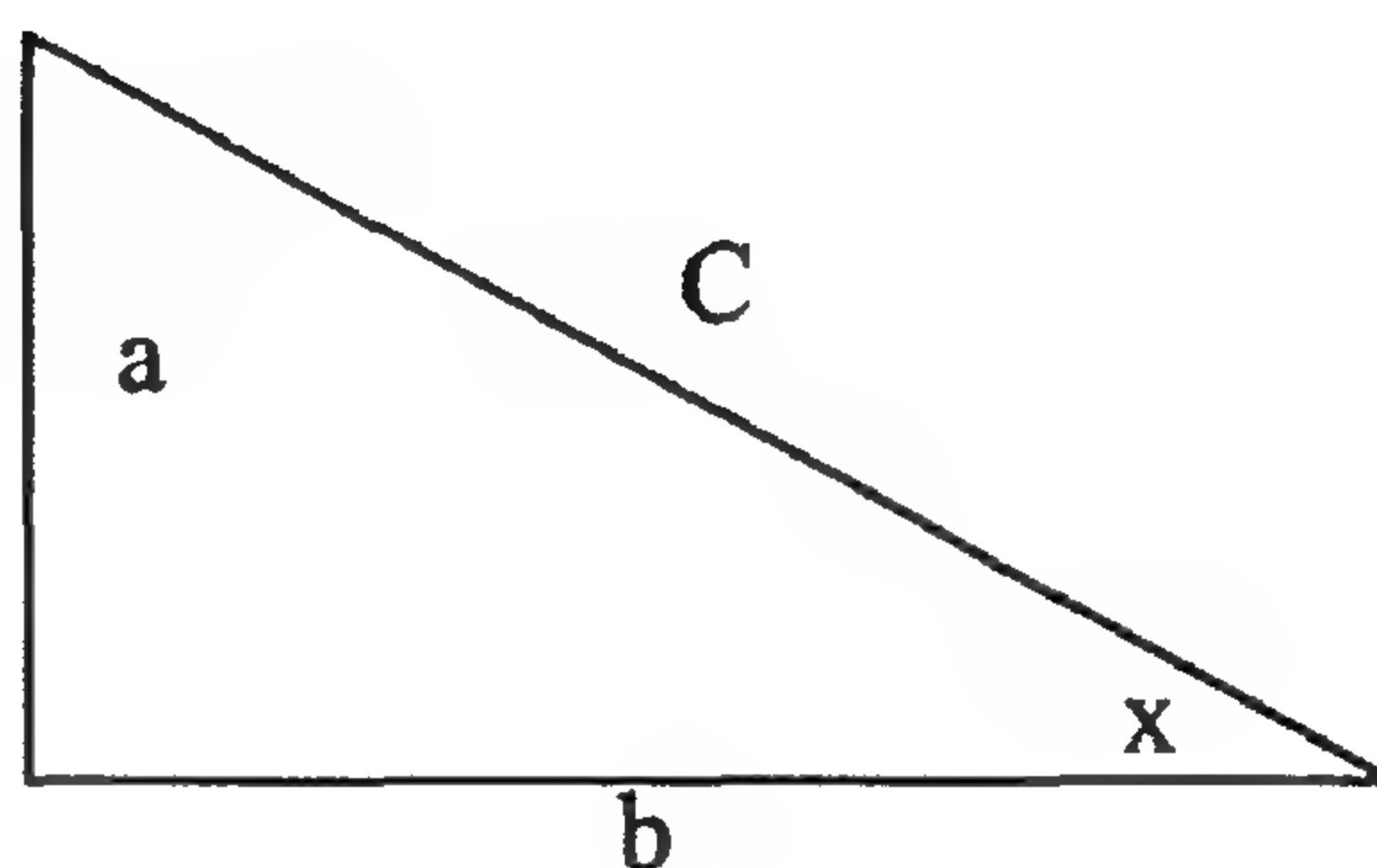
ان الدوال التي تحوي على $\sin(x)$ ، $\cos(x)$ ، $\tan(x)$ ، $\cot(x)$ ،

$\sec(x)$ ، $\csc(x)$ تمثل دوال مثلثية اذ ان:

$$\sin x = \frac{a}{c}$$

$$\cos x = \frac{b}{c}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{a}{b}$$



$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{b}{a}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{c}{b}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{c}{a}$$

وان قوانين التفاضل لهذه الدوال هي

إذا كانت $u=f(x)$ فإن :

$$1. y = \sin u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$2. y = \cos u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$3. y = \tan u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{du}{dx} = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$4. y = \cot u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin^2 u} \cdot \frac{du}{dx} = -\csc^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$5. y = \sec u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec u \cdot \tan u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$6. y = \csc u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\csc u \cdot \tan u \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال 14-3:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

$$1. y = \sin 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos 2x \cdot 2$$



$$2. y = \tan (x^2 + 2x + 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 (x^2 + 2x + 3) (2x + 2) = (2x + 2) \sec^2 (x^2 + 2x + 3)$$

$$3. y = \tan^2 x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \tan x \cdot \sec^2 x$$

$$4. y = \sec^3 \sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \sec^2 \sqrt{x} \cdot \sec \sqrt{x} \cdot \tan \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \sec^3 \sqrt{x} \tan \sqrt{x}$$

$$5. y = \frac{1}{2} \tan x \sin 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \tan x \cos 2x \cdot 2 + \sin 2x \cdot \frac{1}{2} \sec^2 x$$

$$= \tan x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 2x \sec^2 x$$

3.6.2 تفاضل الدوال الاسية واللوغارتمية

Differentiation of Exponential & Logarithmic Functions:

(أ) الدالة اللوغارتمية Logarithmic function

لـو تأملنـا المقـادير الاتيـة

$$[(0.2)^5 = 0.000321, (8^{-1} = \frac{1}{8}), (3^4 = 81), (10)^2 = 100]$$

الاسس 2, 4, 2, 6 التي يرفع لها الاساس بعبارة لو غارتم ، يمكن التعبير

$$\text{عن المقادير السابقة بطريقة اخرى كما يلي } \log_{10} 81 = 4 \quad \log_{10} 2 = 2$$

$$\log_{0.2} 0.00032 = 5 \quad \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{8} = -1$$

اذ ان الرمز Log هو اختصار لكلمة لو غارتم كما ان الاساس يكتب اسفل الرمز ، اي ان لو غارتم اي عدد موجب لاساس موجب (عدا الواحد) هو الاس الذي لو رفع اليه الاساس لكان الناتج مساوياً العدد. تسمى اللوغارتمات التي اساسها 10 باللوغارتمات الاعتيادية وتسمى اللوغارتمات التي اساسها $e (e=2.71828)$ باللوغارتمات الطبيعية ويرمز لها بـ $\ln x$ لذلك فان دالة اللوغارتم الطبيعي تكتب بالصيغة التالية $y = \ln x$

يمكن كتابة خواص هذه الدالة بما يلي :

$$1. \ln xy = \ln x + \ln y$$

$$2. \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$3. \ln X^n = n \ln x$$

(ب) الدالة الاسية The exponential function

إذا كانت $x = \ln y$ فإن $y = e^x$ والتي تسمى بالدالة الاسية وتمثل معكوس دالة اللوغارتم ، وتمتاز بالخواص الآتية :

إذا كانت u, v دوال لـ x فإن :

$$1. e^u e^v = e^{u+v}$$

$$2. \frac{e^u}{e^v} = e^{u-v}$$

$$3. e^{-u} = \frac{1}{e^u}$$

كما تعتبر الدالة a^u دالة اسية، إذا كان a عدد حقيقي موجب وعندما تكون $a = 2.71828$ فتكتب بالصيغة e^u وهناك علاقة بين الدالتين a^u و e^u كما موضحة في أدناه

$$y = a^u$$

$$\ln y = \ln a^u$$

$$\ln y = u \ln a$$

$$y = e^{u \ln a}$$

$$a^u = e^{u \ln a}$$

وان العلاقة الأخيرة يمكن بموجبها تحويل صيغة الدالة الاسية a^u الى الدالة e^u كما ان للدالة a^u الخصائص الآتية



إذا كانت u, v دوال لـ x فإن

$$1. a^0 = 1$$

$$2. a^u a^v = a^{u+v}$$

$$3. a^{-u} = \frac{1}{a^u}$$

$$4. (a^u)^v = a^{uv}$$

$$5. (ab)^u = a^u \cdot b^u$$

وان قوانين التفاضل للدوال الاسية واللوغارتمية هي:

$$1. y = \text{Lnu} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

a كمية ثابتة.

$$2. y = \text{Log}_a u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{\text{Lna}}$$

$$3. y = e^u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$4. y = a^u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a^u \cdot \frac{du}{dx} \cdot \text{Lna}$$

مثال 15-3:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:



$$1. y = x^2 \cdot 3^x$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot 3^x \ln 3 + 3^x \cdot 2x$$

$$2. y = x \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 = 1 + \ln x$$

$$3. y = \ln (\sec x + \tan x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\sec x + \tan x)} \cdot (\sec x \tan x + \sec^2 x)$$

$$4. y = e^{\sin 3x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot 3$$

$$5. y = x^2 e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 \cdot e^x + e^x \cdot 2x = e^x (x^2 + 2x)$$

3.7 التفاضل الضمني Implicit derivative:

في بعض الاحيان تعطي x, y مشتركة في نفس الحد بحيث لا يمكن فصل احدهما عن الاخر، فنجد اشتقاق كل حد في نفس موقعه وفقا للقوانين الخاصة بالتفاضل مع اضافة $\frac{dy}{dx}$ الى كل حد نشق فيه y ، ثم نفرز الحدود التي تحتوي $\frac{dy}{dx}$ في طرف من المعادلة والحدود الخالية منها في طرف المعادلة الاخر ثم يستخرج $\frac{dy}{dx}$ كعامل مشترك ومنه نجد $\frac{dy}{dx}$ فقط.



مثال 16-3:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية:

1. $16x^2 - 9y^2 = 144$

$$32x - 18y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$32x = 18y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{32x}{18y} = \frac{16x}{9y}$$

2. $x^3 + 2xy + y^3 = 5$

$$3x^2 + 2x \frac{dy}{dx} + 2y + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} (2x + 3y) = -3x^2 - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 - 2y}{2x + 3y}$$

3. $16x^4 + y^4 = 32$

$$64x^3 + 4y^3 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$64x^3 = -4y^3 \frac{dy}{dx}$$



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{64x^3}{4y^3} = -16\frac{x^3}{y^3}$$

$$4. x^3 + 4y^3 - xy^2 + 7x = 0$$

$$3x^2 + 12y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - x \cdot 2y \frac{dy}{dx} - y^2 + 7 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} (12y^2 - 2xy) = y^2 - 3x^2 - 7$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 3x^2 - 7}{12y^2 - 2xy}$$

$$5. y^2 + \sqrt{xy} = 3x^3$$

$$2y + \frac{1}{2}(xy)^{-1/2} \left(x \frac{dy}{dx} + 1 \right) = 9x^2$$

$$2y + \frac{x}{2\sqrt{xy}} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2\sqrt{xy}} = 9x^2$$

$$\frac{x}{2\sqrt{xy}} \frac{dy}{dx} = 9x^2 - 2y - \frac{1}{2\sqrt{xy}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(9x^2 - 2y - \frac{1}{2\sqrt{xy}} \right) 2\sqrt{xy}}{x}$$



$$6. x \cos y = \sin (x + y)$$

$$-x \sin y \cdot \frac{dy}{dx} + \cos y = \cos(x + y) \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\cos y - \cos(x + y) = x \sin y \frac{dy}{dx} + \cos(x + y) \frac{dy}{dx}$$

$$\cos y - \cos(x + y) = \frac{dy}{dx} [x \sin y + \cos(x + y)]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos y - \cos(x + y)}{x \sin y + \cos(x + y)}$$

$$7. \cos 3 y = \tan 2x$$

$$-\sin 3y \cdot 3 \frac{dy}{dx} = \sec^2 2x \cdot 2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2 \sec^2 2x}{3 \sin 3y}$$

3.8 الاشتقاقات العليا Higher derivative

تسمى عملية اشتقاق الدالة الاصلية n من المرات بالتفاضل المتتابع او المتتالي، فمشتقة الدالة الاصلية تسمى بالمشتقة الاولى او مشتقة من الرتبة الاولى ويرمز لها بـ y' او $\frac{dy}{dx}$ والمشتقة من المشتقة الاولى تسمى بالمشتقة الثانية او المشتقة من الرتبة الثانية ويرمز لها بـ y'' او $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، والمشتقة من

المشتقة الثانية تسمى بالمشتقة الثالثة او المشتقة من الرتبة الثالثة ويرمز لها بـ

y''' او $\frac{d^3 y}{dx^3}$ وهكذا . فاذا كانت $y=f(x)$ فان

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$$

$$\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = f''(x)$$

.

.

$$\frac{d(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}})}{dx} = \frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

مثال 3-17

اذا كانت $y = \sin 5x + 4x^2$ اوجد $\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}$

$$\frac{dy}{dx} = \cos 5x \cdot 5 + 8x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 25(-\sin 5x) + 8$$

$$y'' = -25 \sin 5x + 8$$

$$y''' = -75 \cos 5x$$

مثال 3-18

اذا كانت $y = e^x \sin 3x + 1$ اوجد y''', y'', y'



$$y' = e^x \cos 3x \cdot 3 + \sin 3x \cdot e^x$$

$$y'' = 3[e^x \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 + \cos 3x \cdot e^x] + \sin 3x \cdot e^x + e^x \cos 3x \cdot 3$$

$$y'' = -8e^x \sin 3x + 6e^x \cos 3x$$

$$y''' = -8(e^x \cos 3x \cdot 3 + \sin 3x \cdot e^x) + 6(e^x \cdot -\sin 3x \cdot 3 + \cos 3x \cdot e^x)$$

$$y''' = -18e^x \cos 3x - 26e^x \sin 3x$$

3.9 تطبيقات التفاضل

هناك العديد من التطبيقات على المشتقات ندرج في ادناه اهمها :

1. الدوال المتزايدة والمتناقصة Increasing & decreasing function

لو كانت لدينا الدالة $y = f(x)$ معرفة على الفترة I فان

أ. ان الدالة f تكون متزايدة عند الفترة I اذا كان $f(x_1) < f(x_2)$

لجميع قيم $x_1, x_2 \in I$ او عندما $f'(x) > 0$ عند اي نقطة في الفترة I .

ب. وتكون الدالة f متناقصة عند الفترة I عندما $x_1 < x_2$ او عندما

$f'(x) < 0$ عند اي نقطة في الفترة I .

مثال 3-19

اوجد الفترة التي تكون فيها الدالة التالية متزايدة ومتناقصة

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2$$

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$f'(x) > 0$$

$$(x-3)(x-1) > 0$$

اي ان الدالة موجبة (متزايدة) في الفترتين $(-\infty, 1)$ و $(3, \infty)$ وسالبة (متناقصة) في الفترة $(1, 3)$.

مثال 20-3

اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 1$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

$$f'(x) = 12x^2(x - 1)$$

اي ان الدالة متزايدة للفترة $(1, \infty)$ ومتناقصة للفترة $(-\infty, 1)$.

3.9.1 القيم العظمى والصغرى

Maximum and Minimum values

ان الدالة $f(x)$ لها قيمة نهاية عظمى مطلقة عند $x=a$ اذا كان $f(a) \geq f(x)$ علماً بان $x \in A$ وان A يمثل منطلق الدالة ، وان الدالة لها قيمة نهاية صغرى مطلقة عند $x=b$ عندما $f(b) \leq f(x)$.

تعريف: اذا كان العدد c ضمن منطلق الدالة f وكان $f'(c) = 0$ او ان $f'(c)$ غير معرفة فان c تسمى بالقيمة الحرجة (critical value) للدالة f .

إذا كانت $x=a$ قيمة حرجة للدالة $y=f(x)$ فاذا :

أ. تغيرت إشارة $f'(a)$ من الموجب الى السالب فان $f(a)$ تمثل قيمة عظمى موضعية (relative)

ب. تغيرت إشارة $f'(a)$ من السالب الى الموجب فان $f(a)$ تمثل قيمة صغرى موضعية .

ج. لم تتغير إشارة $f'(a)$ فان $f(a)$ ليست عظمى ولا صغرى .

مثال 21-3

حدد النقاط الصغرى والعظمى للدالة

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 1$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

$$f'(x) = 12x^2(x-1)$$

0 1

$$+++++|+++++|+++++X^2=0$$

$$-----|-----|+++++ \quad X=1$$

$$-----|-----|+++++$$

عندما $x=0$ فان $f'(x)$ لم تتغير اشارتها فان $f(0)$ ليست عظمى ولا صغرى .

عندما $x=1$ فان $f'(x)$ تغيرت من السالب الى الموجب فان $f(1)$ هي قيمة صغرى موضعية .

مثال 22-3

اوجد النقاط الحرجة وحدد النقاط العظمى والصغرى للدالة

$$1$$

$$-----|-----|+++++-1+\sqrt{3}$$

$$-----|++++|+++++-1-\sqrt{3}$$

$$++++|-----|++++$$

ان $f(-1-\sqrt{3})$ هي قيمة عظمى موضعية .

وان $f(-1+\sqrt{3})$ هي قيمة صغرى موضعية .

ملاحظة (1) لايجاد القيمة العظمى المطلقة (absolute maximum)

والقيمة الصغرى المطلقة ، وذلك بايجاد القيم الحرجة للدالة f المستمرة

للفترة $[a,b]$ ثم نجد $f(a)$ و $f(b)$ ، فان اكبر قيمة تمثل القيمة العظمى

المطلقة واصغر قيمة تمثل القيمة الصغرى المطلقة .



مثال 3-23

اوجد نقاط النهايات المطلقة للدالة $f(x)$ التالية عند $[0,2]$

فعندما $x=1$ فان $f(1)=-6$ وعليه فالقيمة نهاية صغرى مطلقة . وان $f(2)=5$ فالقيمة في نهاية عظمى مطلقة .

ملاحظة (2) يمكن استخدام المشتقة الثانية للدالة لايجاد نقاط النهايات العظمى والصغرى وكما يلي

اذا كانت لدينا الدالة $f(x)$ وكانت $f'(x)$ و $f''(x)$ موجودة للفترة (a,b) التي تحوي $x=c$ وان $f'(c)=0$ فان :

أ. اذا كانت $f''(c) < 0$ فان $f(c)$ هي قيمة عظمى للدالة.

ب. اذا كانت $f''(c) > 0$ فان $f(c)$ هي قيمة صغرى للدالة .

مثال 3-24

اوجد نقاط النهايات العظمى والصغرى للدالة

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0$$

$$3x(x+2) = 0$$

$$f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow f''(0) = 6 > 0$$

$$f''(-2) = -6 < 0$$

وعليه فان الدالة في نهاية صغرى عند $x=0$ وفي نهاية عظمى عند

$$x=-2.$$

3.9.2 فترات التقعر للدالة

لنفرض ان f دالة ولها مشتقة ضمن الفترة I ، فان منحنى الدالة مقعر للاعلى اذا كان ميل (slope) الدالة $f'(x)$ يزداد دائماً في تلك الفترة. وان منحنى الدالة مقعر نحو الاسفل اذا كان ميل الدالة متناقصاً في تلك الفترة. او اذا كانت $f''(x) > 0$ لاي قيمة من $x \in I$ فان f مقعرة نحو الاعلى للفترة I ، واذا كانت $f''(x) < 0$ فان f مقعرة نحو الاسفل للفترة I .

مثال 25-3 اوجد فترات التقعر للدالة

$$f(x) = 2x^3 - 5$$

$$f'(x) = 6x^2$$

$$f''(x) = 12x$$

$$a) 12x > 0 \Rightarrow x > 0 \rightarrow f''(x) > 0$$

$$b) 12x < 0 \Rightarrow x < 0 \rightarrow f''(x) < 0$$

وعليه فان الدالة مقعرة للاعلى عندما $x > 0$ ، وتكون الدالة مقعرة

للاسفل عندما $x < 0$.

3.9.3 نقاط الانقلاب Inflection points

ان نقطة الانقلاب هي النقطة التي يتحول عندها منحنى الدالة من التفرع للأعلى الى التفرع للأسفل والعكس صحيح، كما انها النقطة للدالة f التي يتحول عندها إشارة المشتقة الثانية f'' فاذا كانت x_0 هي نقطة انقلاب للدالة f ، اذن $f''(x_0) = 0$ وكذلك $f'''(x_0) \neq 0$.

مثال 26-3 اوجد نقاط النهايات ونقطة الانقلاب للدالة

$$y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2$$

$$y' = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow (x-3)(x-1) = 0$$

$$y'' = 2x - 4$$

$$y = \frac{1}{3}(3)^3 - 2(3)^2 + 3(3) + 2 = 2 \Rightarrow p_1(3, 2)$$

$$y = \frac{1}{3}(1)^3 - 2(1)^2 + 3(1) + 2 = \frac{10}{3} \Rightarrow p_2(1, \frac{10}{3})$$

$$y' = (2)^2 - 4(2) + 3 = -1$$

$$y' = 4^2 - 4(4) + 3 = 3$$

من خلال الخطوات السابقة نجد ان إشارة المشتقة الاولى تغيرت من السالب الى الموجب عندما اخذنا قيم اقل واكبر من $x=3$ فالنقطة p_1 نهاية صغرى، وبنفس الاسلوب عند اختبار p_2 فان إشارة المشتقة الاولى من موجب الى سالب عند التعويض عن قيم اقل واكبر من $x=1$ وعليه فان p_2 نقطة نهاية عظمى. ولايجاد نقطة الانقلاب فان



$$y'' = 2x - 4$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$y = \frac{1}{3}2^3 - 2(2)^2 + 3(2) + 2 = \frac{8}{3}$$

وعليه فالنقطة $p_3(2, \frac{8}{3})$ هي نقطة انقلاب .

3.10 الاستمرارية Continuity

لتكن f دالة وليكن a عدداً حقيقياً . يقال ان f مستمرة عند النقطة a اذا وفقط اذا كان :

أ. f معرفة عند النقطة a اي ان $f(a)$ عدد حقيقي .

ب. النهاية $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودة، اي ان قيمة النهاية عدد حقيقي .

جـ. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ اي ان قيمة النهاية تساوي قيمة الدالة عند النقطة a .

مثال 3-27

الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ اذ ان $x \neq 1$ ليست مستمرة عند النقطة $x=1$

لأنها غير معرفة عند $x=1$ وان غاية هذه الدالة موجودة عندما $x \rightarrow 1$ وتساوي 2 .



بين هل ان الدالة الاتية مستمرة ام لا

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \rightarrow x < 1 \\ x^2 + 1 \rightarrow x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$f(x) = 1^2 + 1 = 2$$

فتكون الدالة مستمرة عند النقطة 1 لان $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

3.11 التفاضل الجزئي partial differentiation

لتكن $z = f(x, y)$ دالة في المتغيرين المستقلين x, y فانه يمكن ان

(أ) نجعل x تتغير ونترك y ثابتة او ان

(ب) نجعل y تتغير ونترك x ثابتة او ان

(ج) نجعل x, y ان تتغيرا في ان واحد

وفي كاتا الحالتين أوب تكون z في الواقع دالة لمتغير واحد ويمكن

اشتقاقها استناداً الى القواعد المعتادة .

واذا تغير x مع بقاء y ثابتة فعندئذ تكون z دالة في x ومشتقتها

بالنسبة الى x هي :

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

وتسمى بالمشتقة الجزئية الاولى الى z بالنسبة الى x .

اما اذا تغيرت y مع بقاء x ثابتة فان z دالة في y ومشتقتها بالنسبة الى

y هي :

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

وتسمى بالمشتقة الجزئية الاولى الى z بالنسبة الى y .

كما يمكن اشتقاق $\frac{\partial z}{\partial x}$ جزئياً بالنسبة الى x وبالنسبة الى y فنحصل

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$\text{و } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\text{و } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ مع ملاحظة ان } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ والتي تسمى بالتفاضلات الجزئية ذات الرتب العليا .}$$

مثال 29-3:

اوجد $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ ، $\frac{\partial z}{\partial x}$ لكل من الدوال التالية:



$$1. f(x,y) = z = 100 - x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2$$

$$2. z = f(x,y) = (2+xy) \cos y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cos y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (2+xy) \cdot (-\sin y) + \cos y \cdot x$$

$$= -(2+xy) \sin y + x \cos y$$

$$3. z = \sin(x+2y) - \cos(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x+2y) + \sin(x^2+y^2) \cdot 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(x+2y) \cdot 2 + \sin(x^2+y^2) \cdot 2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\sin(x+2y) \cdot 2 + 2x \cos(x^2+y^2) \cdot 2y$$

3-10-1 تطبيقات التفاضل الجزئي:



ان من اهم تطبيقات التفاضل الجزئي هو القيم العظمى والصغرى لدوال في متغيرين مستقلين ، وفيما يلي توضيح الطريقة .

لو اردنا ايجاد اعلى نقطة واسفل نقطة على سطح امس ممثل بالمعادلة $z = f(x, y)$ اذا ان z معرفة ومستمرة ولها مشتقات جزئية مستمرة بالنسبة الى x و y في منطقة ما في المستوي xy ومثلاً (a, b) بحيث ان $f(x, y) \geq f(a, b)$ فيقال ان الدالة f لها قيمة صغرى محلية في النقطة (a, b) . اما اذا كانت المتراجحة $f(x, y) \leq f(a, b)$ فيقال ان الدالة f لها قيمة عظمى مطلقة في النقطة (a, b) واذا فرضنا ان $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ كلاهما موجود في (a, b) فان الشرط اللازم الذي يجب ان يتحقق هو :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

مثال 3-30

اوجد النقط العليا والسفلى على السطح

$$Z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 2y - 4$$

وبتطبيق الشرط $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ و $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ نحصل على المعادلتين الاتيتين :

$$2x - y = -2 \quad \dots\dots\dots 1$$

$$-x + 2y = -2 \quad \dots\dots\dots 2$$

وعند حل المعادلتين انيا نجد ان $x = y = 2$. وبذلك تكون النقطة (-) $(-2, -2)$ هي النقطة المشار اليها (a, b) وان $f(-2, -2) = -8$ ولاختبار سلوك الفرق $D = f(x, y) - f(-2, -2)$ نضع $x = -2 + h$ وكذلك

$$Y = -2 + k \text{ فان}$$

وان الفرق هو موجب لجميع قيم

$$D = f(-2 + h, -2 + k) - f(-2, -2)$$

$$D = h^2 - hk + k^2 = \left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4}$$

و k ما عدا $h = k = 0$ اي ان

$$f(x, y) \geq f(-2, -2)$$

اي ان السطح له نقطة دنيا في $(-2, -2, -8)$ ويكون للدالة قيمة صغرى مطلقة (-8) .



تمارين الفصل الثالث

1. اوجد غايات كل من الدوال التالية:

a. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 2x^2 + 1)$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x^2-5}$

c. $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2 - 3x + 6}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + 1} - 6x)$

e. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 + 3x + 2}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x}$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt{2}}$

h. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^3 + 5x^2 + 4x + 4}$



2. اوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

a. $f(x) = y = x^3 - 2x - 5$

b. $y = (x^3 + 1)(2x^2 + 8x - 5)$

c. $y = \sqrt{3x^2 + 8x + 6}$

d. $y = (x + 1)(x^2 - 1)(2x + 3)$

e. $y = \left(\frac{6x^2 - 8 + 4x}{4x^2 + 9} \right)^{10}$

f. $y = \frac{x}{7} - \frac{7}{x}$

g. $y = \frac{1}{\sqrt{(4x^2 + 5x)^3}}$

h. $y = \left(\frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} \right)^{5/2}$

3. اوجد لكل من $\frac{dy}{dx}$ الدوال التالية:

a. $y = 2z^3 - \frac{1}{z}$, $z = \left[\frac{x}{(x-1)^4} \right]^2$



b. $\sqrt{xy} - 3y^2 + 5x = 9$

c. $xy = \sqrt{x^2 + y^2}$

d. $(2x+3)^4 = 3y^4$

e. $y = \sqrt{u}, u = \sqrt{3-2v}, v = x^2$

f. $y = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}}$

g. $y = \sec^2 \sqrt{x^2 - 2}$

h. $x \cos y = \sin(x + 2y)$

i. $y = 3^{-x^2}$

j. $y = x^x$

k. $y = x^2 e^{2x} \cos 3x$

l. $y = \text{Log} \left(\frac{x^2 + 2x}{2} \right)$

m. $y = \text{Ln} (\text{Ln } x)$

4. اذا كان $y = e^{-2x} (\sin 2x + \cos 2x)$ بين ان

$$y'' + 4y' + 8y = 0$$



5. اوجد $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}$

a. $f(x, y) = \cos(3y - 5) + x \sec(x^2 + y^2)$

b. $f(x, y) = e^{y - \frac{1}{x}} + 3 \ln(x+y)$

c. $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\cos y} - \frac{1}{\sqrt{1 - \sin xy}}$

6. اذا كان $xy = 1$ اوجد y''' , y'' , y'

7. اوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

a. $y = 3 \sin \frac{x}{3} - \cos \frac{x}{3}$

b. $y = \frac{\tan x + \sin x}{\cos x}$

c. $x^2 = \sin 2xy + \sin y$

d. $x + \tan(xy) = 0$

e. $y = \tan^2(\cos x)$

f. $y = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$



8. هل ان الغاية للدالة $f(x)$ موجودة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ 3x & x > 2 \end{cases}$$

9. جد النقاط التي تكون الدالتين التاليتين غير مستمرة عندها

$$a) f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$$

$$b) f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

10. احسب قيمة c لكي تكون الدالة مستمرة عند النقطة $x=c$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - c^2}{x - c}, & x \neq c \\ 1, & x = c \end{cases}$$





الفصل الرابع التكامل

4-1 التكامل غير المحدود:

4-2 قوانين التكامل

4-3 بعض طرق التكامل

4-4 التكامل المحدود Definite Integrals



التكامل

4.1 التكامل غير المحدود:

إذا كانت $F(x)$ دالة مشتقتها الأولى تساوي $f(x)$ أي $[f(x)=f(x)]$ فإنه يقال الدالة $F(x)$ أنها تكامل الدالة $f(x)$. أي أن عملية التكامل هي عكس عملية التفاضل والخطوات المتبعة في التكامل هي الخطوات العكسية للتفاضل. يرمز للتكامل بالرمز $\int f(x)dx$ حيث أن $f(x)$ تسمى بـ *Integrand* والعملية *integration* و dx أي التكامل بالنسبة لـ x أي أن:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

وهذا التكامل يسمى بالتكامل غير المحدود (Infinite integral) ويعتبر تكامل غير وحيد أي أنه إذا كان لدينا الدالة $f(x)=6x$ فإن:

$$\int f(x)dx = \int 6x dx = 3x^2 + c$$

حيث c ثابت التكامل وذلك لأن:

$$\frac{d}{dx}(3x^2 - 5) = \frac{d}{dx}(3x^2 + 10) = \frac{d}{dx}(3x^2) = 2x$$

وهكذا فإن التكامل غير المحدود يكون متبوعاً بثابت التكامل دائماً.



4.2 قوانين التكامل

يطلق على الصيغ الآتية والمستمدة من قوانين المشتقات بصيغ التكامل formulas Integration على اعتبار أن عملية التكامل هي العملية العكسية لعملية الاشتقاق وتدرج فيما يلي بعض هذه الصيغ:

$$1) \int \frac{d}{dx}[f(x)]dx = f(x)$$

$$2) \int [f(x) \mp g(x)]dx = \int f(x)dx \mp \int g(x)dx$$

$$3) \int af(x)dx = a \int f(x)dx \quad \text{اذا ان } a \text{ ثابت}$$

ويمكن توسيع الصيغ السابقة بالشكل الآتي، إذا كانت u دالة x قابلة للتفاضل فإن:

$$4) \int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + c, m \neq -1$$

$$5) \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$$

$$6) \int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + c, a > 0$$

$$7) \int e^u du = e^u + c$$

$$8) \int \sin u du = -\cos u + c$$

$$9) \int \cos u du = \sin u + c$$



$$10) \int \sec^2 u du = \tan u + c$$

$$11) \int \csc^2 u du = -\cot u + c$$

$$12) \int \sec u \tan u du = \sec u + c$$

$$13) \int \csc u \cot u du = -\csc u + c$$

مثال 4-1

اوجد ناتج التكاملات التالية:

$$1) \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$$

$$2) \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$3) \int 4x^{-3} dx = 4 \int x^{-3} dx = 4 \frac{x^{-2}}{-2} + c = -\frac{2}{x^2} + c$$

$$4) \int (4x^3 + 3x^2 - x) dx = 4 \int x^3 dx + 3 \int x^2 dx - \int x dx = x^4 + x^3 - \frac{x^2}{2} + c$$

$$5) \int (x^5 - \frac{1}{x^2} + 2) dx = \int x^5 dx - \int x^{-2} dx + 2 \int dx = \frac{x^6}{6} - \frac{x^{-1}}{-1} + 2x + c$$

$$6) \int (3x + 8)^4 dx = \frac{1}{3} \int (3x + 8)^4 3 dx = \frac{1}{3} \frac{(3x + 8)^5}{5} + c$$



$$7) \int (x^3 + 1)^3 x^2 dx = \frac{1}{3} \int (x^3 + 1)^3 3x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{(x^3 + 1)^4}{4} + c$$

$$8) \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} dx = \int (x^2+2x)^{-\frac{1}{2}} (x+1) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (x^2+2x)^{-\frac{1}{2}} 2(x+1) dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(x^2+2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{x^2+2x} + c$$

$$9) \int \frac{3x^3+6x}{x} dx = \int \frac{3x^3}{x} dx + \int \frac{6x}{x} dx$$

$$= 3 \int x^2 dx + 6 \int dx = x^3 + 6x + c$$

$$10) \int \sin 3x dx = \frac{1}{3} \int \sin 3x \cdot 3 dx = \frac{1}{3} (-\cos 3x) + c$$

$$11) \int x \sec^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \int \sec^2 x^2 2x dx = \frac{1}{2} \tan x^2 + c$$

$$12) \int \frac{\sec \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \sec \sqrt{x} \tan \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \sec \sqrt{x} + c$$

$$13) \int \cos(3x+1) dx = \frac{1}{3} \int \cos(3x+1) 3 dx = \frac{1}{3} \sin(3x+1) + c$$

$$14) \int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2 \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \sin x^2 + c$$



$$15) \int \sin^3 4x \cos 4x dx = \int (\sin 4x)^3 \cos 4x dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (\sin 4x)^3 4 \cos 4x dx$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(\sin 4x)^4}{4} + c = \frac{1}{16} (\sin 4x)^4 + c$$

$$16) \int \sec^3 x \tan x dx = \int \sec^2 x \cdot \sec x \tan x dx = \frac{(\sec x)^3}{3} + c$$

$$17) \int \tan^3 2x \sec^2 2x dx = \int (\tan 2x)^3 \sec^2 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (\tan 2x)^3 2 \sec^2 2x dx$$

$$= \frac{1}{8} (\tan 2x)^4 + c$$

$$18) \int e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int e^{5x} 5 dx = \frac{1}{5} e^{5x} + c$$

$$19) \int e^{\sin 2x} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int e^{\sin 2x} 2 \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^{\sin 2x} + c$$

$$20) \int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}} dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}} dx - \int \frac{1}{e^{2x}} dx = \int dx - \int e^{-2x} dx$$

$$= x - \left(-\frac{1}{2}\right) \int e^{-2x} (-2 dx) = x + \frac{1}{2} e^{-2x} + c$$

$$21) \int 2^{\sin 2x} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \cdot \ln 2 \int 2^{\sin 2x} \frac{2 \cos 2x}{\ln 2} dx = \frac{\ln 2}{2} 2^{\sin 2x} + c$$

$$22) \int \frac{\ln x}{x} dx = \int (\ln x) \frac{1}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

4.3 بعض طرق التكامل

Method of Integrations Some

تستخدم لتحويل التكاملات غير المألوفة والتي لا يمكن تكاملها بالطرق الاعتيادية الى الصيغة القياسية التي يمكن ان نطبق عليها قوانين التكامل ومن هذه الطرق:

4.3.1 التكامل بالتجزئة Integration by Parts

هذه الطريقة مشتقة من قاعدة تفاضل حاصل ضرب دالتين

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \quad (\text{اذا ان } u, v \text{ دوال لـ } x)$$

ويتكامل الطرفين بالنسبة لـ x ينتج

$$uv = \int u dv + \int v du$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

وهذا القانون يعبر عن تكامل دالة بتكامل دالة اخرى ابسط منها مثل حاصل ضرب دالة اسية مع دالة جبرية او دالة مثلثية مع دالة جبرية او اسية، او دالة لوغاريتمية مع دالة جبرية وهكذا.

ولتطبيق هذه الطريقة يتم اختيار جزء من التكامل ليمثل (u) والقابل

للتفاوض والجزء الاخر dv والقابل للتكامل مباشرة والامثلة الاتية توضح هذه الطريقة .

مثال 2-4

اوجد ناتج كل من التكاملات التالية:

$$1) \int \ln x dx \quad 2) \int x e^x dx \quad 3) \int e^x \sin 2x dx \quad 4) \int x^2 \cos x dx$$

$$1) \int \ln x dx$$

نفرض ان $\ln x = u$ وباشتقاق الطرفين فان

$$\frac{1}{x} dx = u$$

نفرض ان $dx = dv$ وبتكامل الطرفين فان

$$\int dx = \int dv, x = v$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int \ln x dx = \ln x \cdot x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$$

$$2) \int x e^x dx$$

نفرض ان $x = u$ فان $dx = du$ ونفرض ان $e^x dx = dv$ فان

$$\int e^x dx = \int dv$$

$$\int x e^x dx = uv - \int v du = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

$$3) \int e^x \sin 2x dx$$

نفرض ان $e^x = u$ فان $e^x dx = du$ ونفرض ان $\sin 2x dx = dv$ اي

$$\frac{1}{2} \int \sin 2x \cdot 2 dx = \int dv \quad \text{فان} \quad -\frac{1}{2} \cos 2x = v \quad \text{اذن}$$

$$\int e^x \sin 2x = e^x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) - \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) e^x dx = \frac{1}{2} e^x \cos 2x + \int e^x \cos 2x dx$$

وان $\int e^x \cos 2x dx$ لا يمكن ايجاده الا بطريقة التجزئة اي:

نفرض ان $e^x = u$ وان $e^x dx = du$ وان $\cos 2x dx = dv$ فان

$$\frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \int dv \quad \text{اي} \quad \frac{1}{2} \sin 2x = v \quad \text{اذن}$$

$$\int e^x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{2} (uv - \int v du) = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \left(e^x \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \int \frac{1}{2} \sin 2x e^x dx\right)$$

$$= -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x - \frac{1}{4} \int e^x \sin 2x dx$$

$$\int e^x \sin 2x + \frac{1}{4} \int e^x \sin 2x = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x$$

$$\frac{5}{6} \int e^x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x$$

$$\int e^x \sin 2x = \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x\right) + c$$

$$4) \int x^2 \cos x dx$$

نفرض ان $x^2 = u$ فان $2x dx = du$ ونفرض ان $\cos x dx = dv$ اي $\sin x = v$

اذن

$$\int x^2 \cos x dx = uv - \int v du = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$$

ونستخدم الطريقة مرة ثانية على صيغة التكامل الناتجة من الطريقة

الاولى اي

نفرض ان $x=u$ فان $dx=du$ وان $\sin x dx = dv$ اي $v = -\cos x$ وعليه

فان

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x dx &= x^2 \sin x - 2(uv - \int v du) = x^2 \sin x - 2(-x \cos x - \int -\cos x dx) \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c\end{aligned}$$

مثال 3-4:

جد ناتج التكامل التالي

$$\int (x^2 + 1) \ln x dx$$

نفرض ان $u = \ln x$ فان $du = \frac{dx}{x}$ وان $dv = (x^2 + 1) dx$ فان

$$v = \frac{x^3}{3} + x$$

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 1) \ln x dx &= \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \ln x - \int \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \frac{dx}{x} \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \ln x - \frac{x^3}{9} - x + c\end{aligned}$$

4.3.2 التكامل بطريقة الاستعاضة بالنسب المثلثية

Trigonometric Substitutions

تجري تكاملات الدوال من النوع

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \sqrt{a^2 + u^2}, \sqrt{u^2 - a^2}, a^2 + u^2, a^2 - u^2$$

اذ ان a كمية ثابتة وان u هي دالة لـ x فيتم التعويض عن u بنسب
مثلثية استنادا الى المتطابقات المثلثية الاتية:

$$1 - \sin^2 x = \cos^2 x \quad (1)$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \quad (2)$$

$$\sec^2 x - 1 = \tan^2 x \quad (3)$$

وبضرب طرفي هذه المتطابقات في a^2 فان التعويضات المثلثية التالية
تؤدي الى

$$U = a \sin x \text{ يجعل } a^2 - u^2 \text{ مساويا لـ } a^2 \cos^2 x$$

$$U = a \tan x \text{ يجعل } a^2 + u^2 \text{ مساويا لـ } a^2 \sec^2 x$$

$$U = a \sec x \text{ يجعل } u^2 - a^2 \text{ مساويا لـ } a^2 \tan^2 x$$

وهكذا ترى ان لكل حالة تعويضا مناسبيا يوصلنا الى دالة بسيطة
يسهل تكاملها والامثلة الاتية توضح الخطوات:

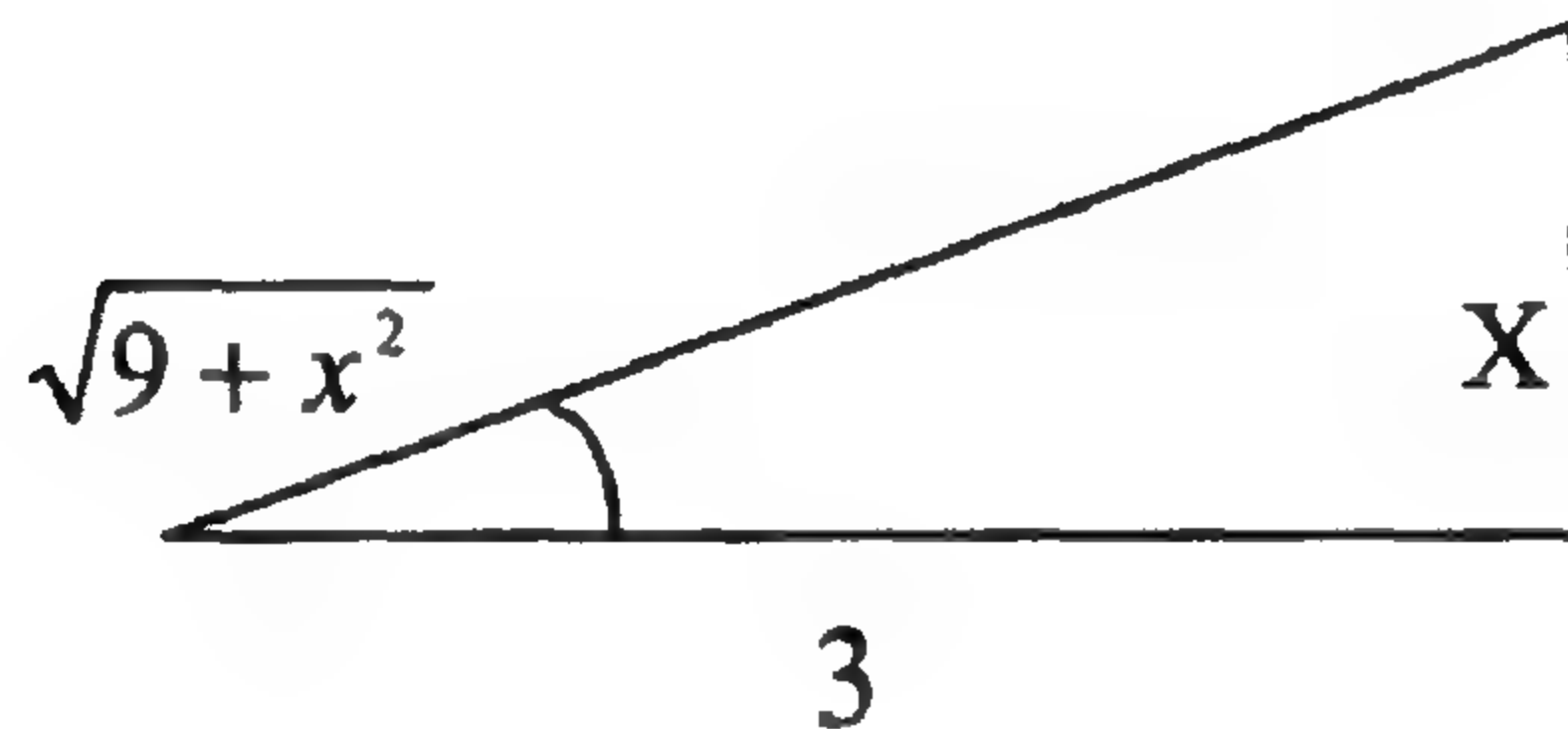
مثال 4-4 اوجد ناتج التكاملات التالية:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}} = I_1$$

نفرض ان $x = 3 \tan \theta$ فيكون $dx = 3 \sec^2 \theta d\theta$ أي ان

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int \frac{3 \sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{9 + 9 \tan^2 \theta}} = \int \frac{3 \sec^2 \theta d\theta}{3\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \\
 &= \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec \theta} \\
 &= \int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c
 \end{aligned}$$

ولتحويل الجواب الى المتغير الاصيلي X نرسم مثلث قائم الزاوية



ومن المثلث نجد ان $\tan \theta = \frac{x}{3}$ وان $\frac{\sqrt{9 + x^2}}{3} = \sec \theta$

أي ان

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}} = \ln \left| \frac{\sqrt{9 + x^2}}{3} + \frac{x}{3} \right| + c$$

$$2) \int \sqrt{4 - x^2} dx = I_2$$

نفرض ان $x = 2 \sin \theta$ فان $dx = 2 \cos \theta d\theta$ أي ان

$$I_2 = \int \sqrt{4 - 4 \sin^2 \theta} \cdot 2 \cos \theta d\theta = 4 \int \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta$$

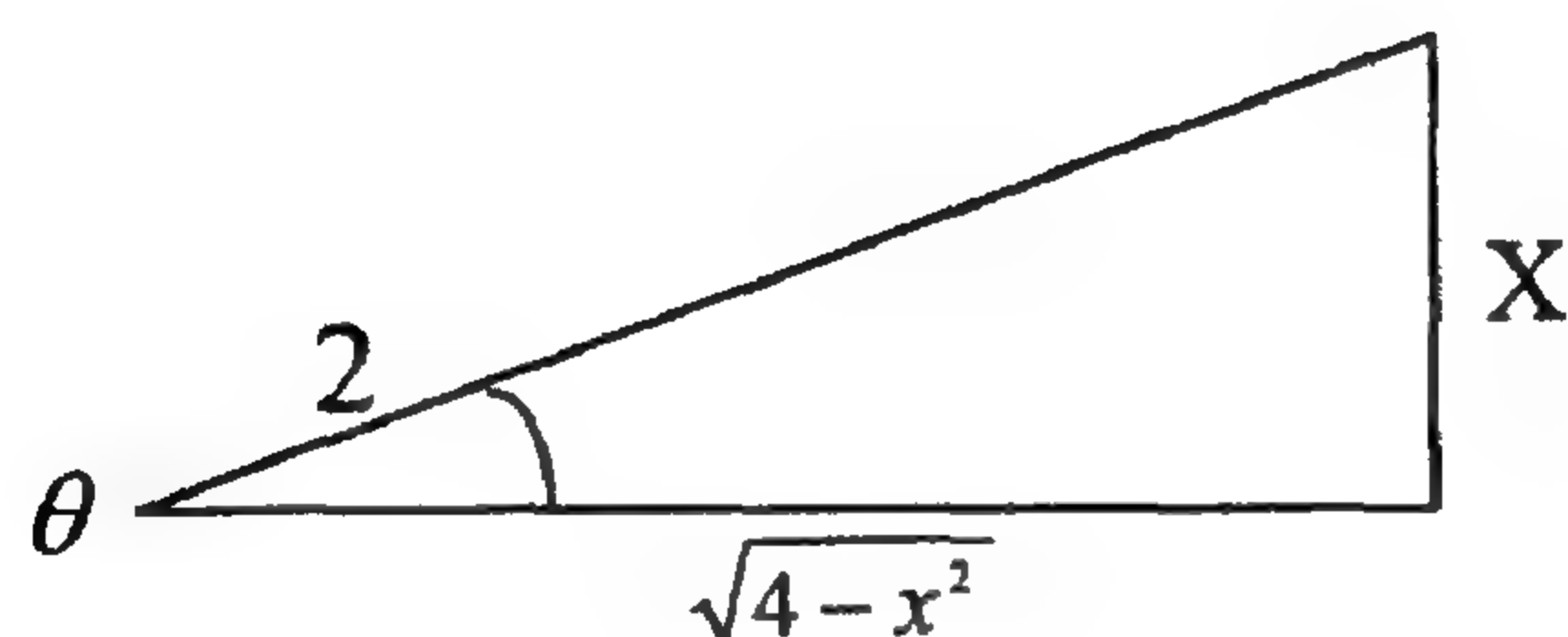
$$= 4 \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{4}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad \text{اذ ان}$$

$$= 2 \int d\theta + \int \cos 2\theta d\theta$$

$$= 2\theta + \sin 2\theta + c = 2\theta + 2 \sin \theta \cos \theta + c$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \text{اذ ان}$$



من المثلث السابق نجد ان

$$\sin \theta = \frac{x}{2} \rightarrow \theta = \sin^{-1} \frac{x}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

$$I_2 = 2 \sin^{-1} \frac{x}{2} + 2 \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + c$$

أي ان

$$\int \sqrt{4-x^2} dx = 2 \sin^{-1} \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + c$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2 - 4}} = I_3$$

نفرض ان $x-2=2\sec \theta$ فان $dx = 2 \sec \theta \tan \theta d\theta$

$$I_3 = \int \frac{2 \sec \theta \tan \theta d\theta}{\sqrt{4 \sec^2 \theta - 4}} = \int \frac{2 \sec \theta \tan \theta d\theta}{2 \sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$$

$$= \int \frac{\sec \theta \tan \theta d\theta}{\tan \theta} = \int \sec \theta d\theta$$

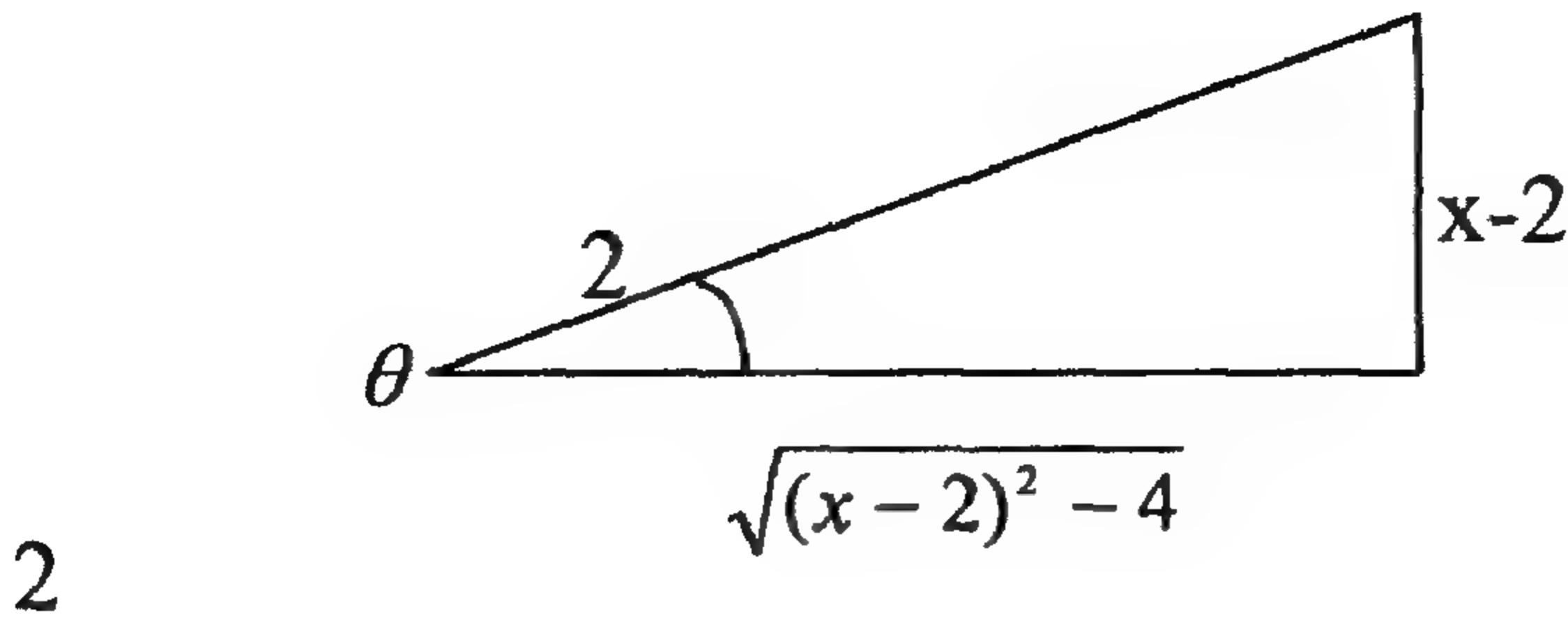
$$= \int \frac{\sec \theta (\sec \theta + \tan \theta)}{\sec \theta + \tan \theta} d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2 \theta (\sec \theta + \tan \theta)}{\sec \theta + \tan \theta} d\theta$$

ومن الملاحظ ان مشتقة المقام موجود في البسط أي ان

$$= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c$$

ولغرض التحويل الى X نرسم المثلث الاتي:



$$I_3 = \ln \left| \frac{x-2}{2} + \frac{\sqrt{(x-2)^2 - 4}}{2} \right| + c$$

4.3.3 طريقة التكامل بالكسور الجزئية

Method of Partial Fractions

عندما تكون الدالة المراد تكاملها نسبية (نسبة بين متعددتي حدود) بحيث ان البسط اكبر او مساو للمقام بالدرجة يجب ان تبسط النسبة وذلك بالقسمة العادية لتتحول الى مقدار صحيح مع كسر حقيقي (بسطه اقل من مقامه بالدرجة) ثم تجزأ الكسر الناتج الى كسور اخرى مجموعها الجبري يساوي الكسر الاصيل. وتسمى الكسور البسيطة بالكسور الجزئية (Partial Fractions) وتعتمد التجزئة على قابلية مقام الكسر للتحليل. والامثلة توضح الطريقة



مثال 4-5 اوجد ناتج التكاملات التالية:

$$1) \int \frac{dx}{(x-1)(x-3)} = I_1$$

الحل:

$$I_1 = \int \left[\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} \right] dx$$

ونجد قيم الثوابت A, B حسب ما يلي:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-1)}{(x-1)(x-3)}$$

أي ان

$$A(x-3) + B(x-1) = 1$$

$$Ax - 3A + Bx - B = 1$$

$$X(A+B) - (3A+B) = 1$$

فان معامل X غير موجود في الطرف الايمن أي ان مساوي للصفر

$$A+B=0 \quad (1)$$

$$-3A-B=1 \quad (2) \text{ وان الحد الثابت هو } (1) \text{ أي ان}$$

وبحل المعادلتين اننا نجد ان

$$-2A=1 \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{1}{2}$$

وبالتعويض فان $B=\frac{1}{2}$ فيصبح التكامل I_1 بالشكل الاتي:

$$I_1 = \int \left[\frac{-1/2}{X-1} + \frac{1/2}{X-3} \right] dx$$

$$= \int \frac{-1/2}{x-1} dx + \int \frac{1/2}{x-3} dx$$

$$I_1 = -\frac{1}{2} \ln(x-1) + \frac{1}{2} \ln(x-3) + c$$

$$2) \int \frac{dx}{x(x+1)^2} = I_2$$

الحل:

$$I_2 = \int \left[\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x+1)^2} \right] dx$$

ونجد الثوابت A, B, C كما يلي:

$$1=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx$$

$$1=A(x^2+2x+1)+Bx^2+Bx+Cx$$

$$1=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A$$

الحد الثابت هو (1) ومساوي لـ A أي ان $A=1$ وان معاملي x^2 ،



هما صفر أي ان

$$A+B=0$$

$$2A+B+C=0$$

وبعد حل المعادلات نجد ان

$$B=-1$$

$$, \quad C=-1$$

اذن

$$I_2 = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2} \right] dx = \ln x - \ln(x+1) - \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + c$$

$$I_2 = \ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + c = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1} + c$$

$$3) \int \frac{3-x}{x^3 - x^2 + x - 1} dx = I_3$$

$$I_3 = \int \frac{3-x}{x^2(x-1) + (x-1)} dx = \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$= \int \left[\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \right] dx$$

مع ملاحظة ان الجزء الثاني للكسر $(x+1)^2$ هو من الدرجة الثانية

لذلك نضع $Bx+C$

$$3-x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

$$3-x = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$3-x = (A+B)x^2 + (-B+C)x + (A-C)$$



$$A-c=3 \quad (1)$$

$$A+B=0 \quad (2)$$

$$-B+c=-1 \quad (3)$$

وبعد حل المعادلات الثلاث انيا نحصل على

$$A=1, B=-1, C=-2$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{-x-2}{x^2+1} dx$$

$$= \ln(x-1) - \int \frac{x dx}{x^2+1} - 2 \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$I_3 = \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 2 \tan^{-1} x + c$$

$$4) \int \frac{x^3 - 4x^2 - x}{x^2 - 6x + 5} dx = I_4$$

لما كان البسط اعلى درجة من المقام، نقسم البسط على المقام بالقسمة

الطويلة ليكون الباقي اقل درجة من المقام ثم نبدأ بالتجزئة وكالاتي:

$$I_4 = \int \left(x + 2 + \frac{6x-10}{x^2+6x+5} \right) dx$$

$$\frac{6x-10}{x^2+6x+5} = \frac{6x-10}{(x-5)(x-1)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1}$$

$$6x-10=A(x-1)+B(x-5)=Ax-A+Bx-5B$$

$$6x-10=(A+B)x+(-A-5B)$$

$$A+B=6 \quad (1)$$

$$-A-5B=-10 \quad (2)$$

وبحل المعادلتين انيا نحصل على:

$$B=1, A=5$$

$$I_3 = \int (x + 2 + \frac{5}{x-5} + \frac{1}{x-1}) dx$$

اذن

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + 5Ln(x-5) + Ln(x-1) + c$$

4.4 التكامل المحدود Definite Integrals

اذا كانت $f(x)$ اية دالة مستمرة اكبر من الصفر بين $x=a$ و $x=b$ وكانت $f(x)$ اية دالة مشتقتها تساوي $f(x)$ فان المسافة الواقعة تحت المنحنى وبين a, b هي $f(b)-f(a)$ وهذا التعبير يسمى بالتكامل المحدود للدالة $f(x)$ من a الى b ويعبر عنه كما يلي:

$$\int_a^b f(x) dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a) \dots (4-1)$$

مع ملاحظة عدم وجود ثابت التكامل في التكامل المحدود. وللتكامل المحدود تطبيقات عديدة منها:

4.4.1 تطبيقات التكامل المحدود

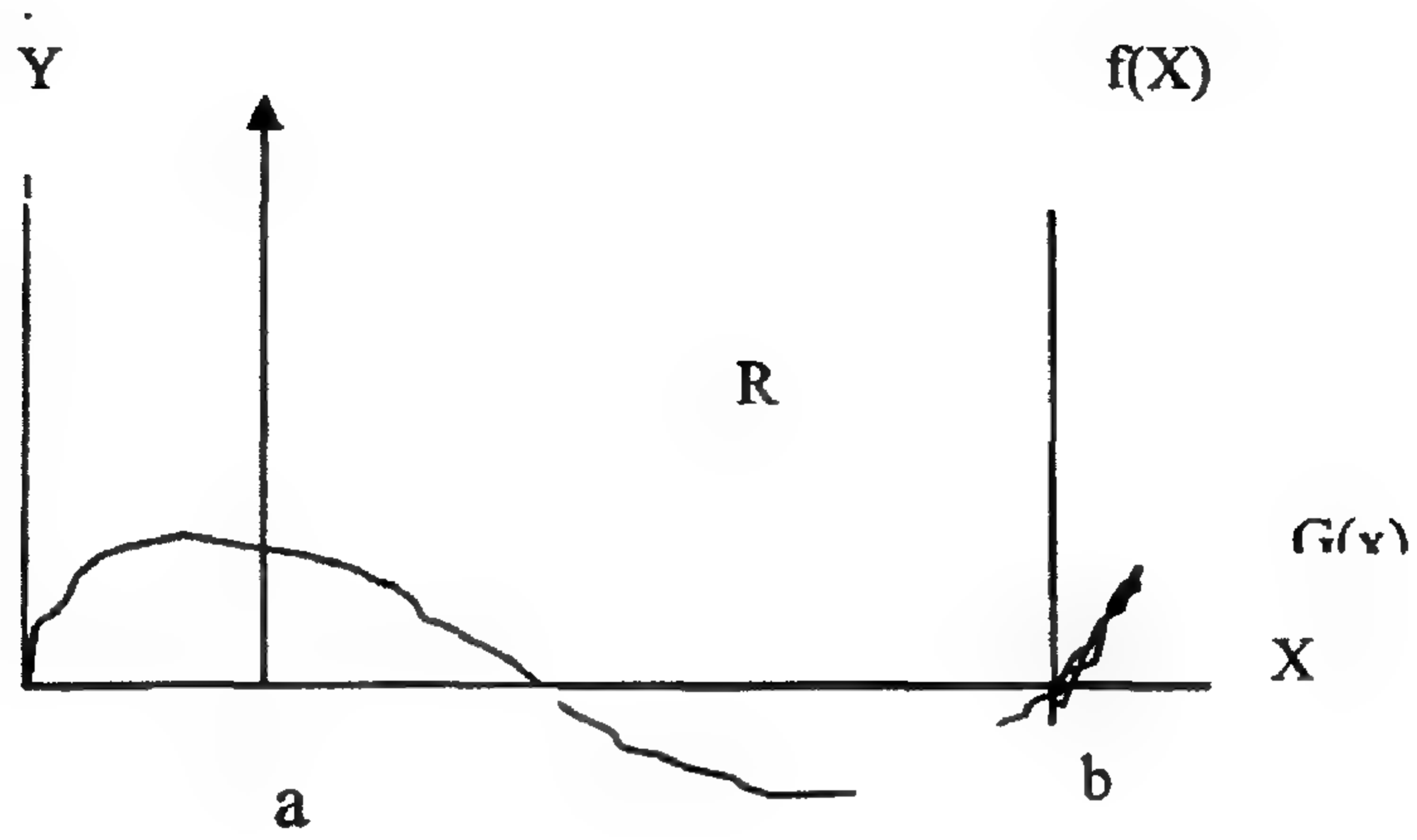
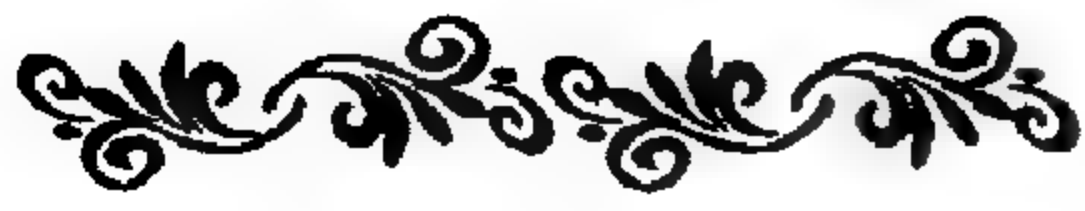
هناك تطبيقات عديدة للتكامل المحدود فهو يستعمل في إيجاد مساحة منطقة بين منحنين وإيجاد حجوم الاجسام الدورانية، والمساحات السطحية للاجسام الدورانية وإيجاد المسافة المقطوعة لجسم يتحرك بتعجيل وغيرها. وفيما يلي بعض التطبيقات:

1-1-4-4 المساحة بين منحنين

إذا كانت f, g دالتين مستمرتين للفترة المغلقة $[a, b]$ بحيث ان $f(x) \geq g(x)$ ونرغب في إيجاد مساحة المقطع R فاننا نجزئ الفترة $[a, b]$ الى n من الفترات الجزئية المتساوية بطول $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ وتكون لكل فترة جزئية عرض Δx بارتفاع $[f(c_i) - g(c_i)]$ اذ ان c_i يقع في الفترة الجزئية، عندئذ تكون مساحات هذه المستطيلات هو المجموع الاتي:

$$\sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)]$$

الذي يمثل قيمة تقريبية لمساحة المنطقة R حسب الشكل الاتي:



مثال 4-6

اوجد المساحة تحت المنحنى $y=x^2+3x+1$ بين $x=2, x=5$

الحل

$$A = \int_2^5 (x^2 + 3x + 1) dx = \left. \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x \right|_2^5$$
$$= \left(\frac{5^3}{3} + \frac{3(5)^2}{2} + 5 \right) - \left(\frac{2^3}{3} + \frac{3(2)^2}{2} + 2 \right) = 73.5$$

مثال 4-7

اوجد المساحة المحصورة تحت المنحنى $y=x^2$ ومحور x من $x=1$

الى $x=3$

$$A = \int_1^3 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

مثال 4-8

اوجد المساحة الواقعة فوق المحور السيني وتحت القطع المكافئ

$$y = 4x - x^2$$

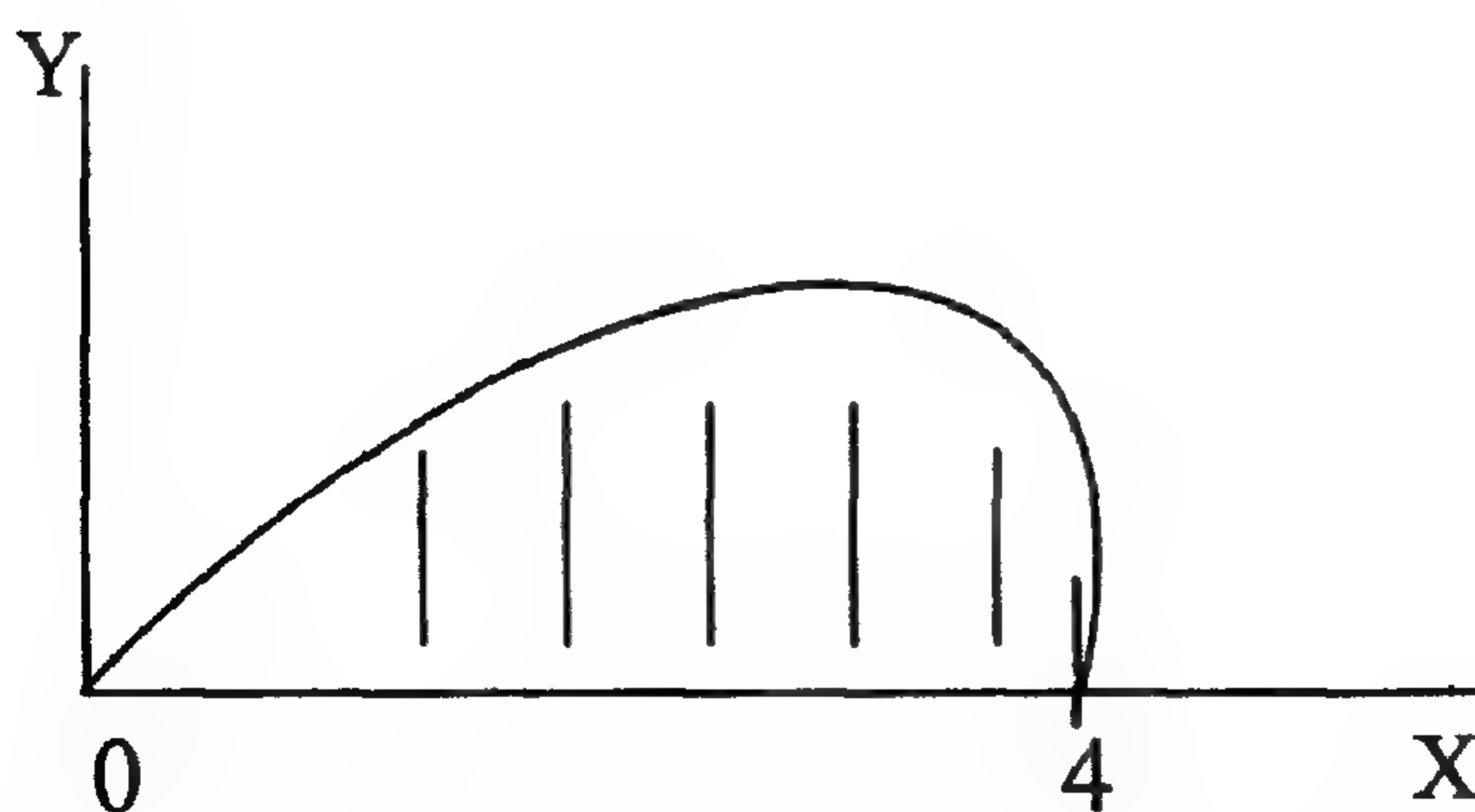
الحل:

ان المنحنى $y = 4x - x^2$ يقطع احدائى x عند النقطتين

$$x(4-x)=0 \implies x=0, x=4$$

فان

$$A = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left. 2x^2 - \frac{x^3}{3} \right|_0^4 = \frac{32}{3}$$



ملاحظة: اذا كانت المساحة المطلوبة واقعة تحت المحور السيني فان

الناتج مسبقا بعلاقة السالب واذا كان المطلوب مجموع المساحات بين

المنحني والمحور السيني وكان بعضها فوق المحور السيني والآخر تحته
فاننا نجمع القيم المطلقة للمساحات في مثل هذه الحالات.

مثال 4-9

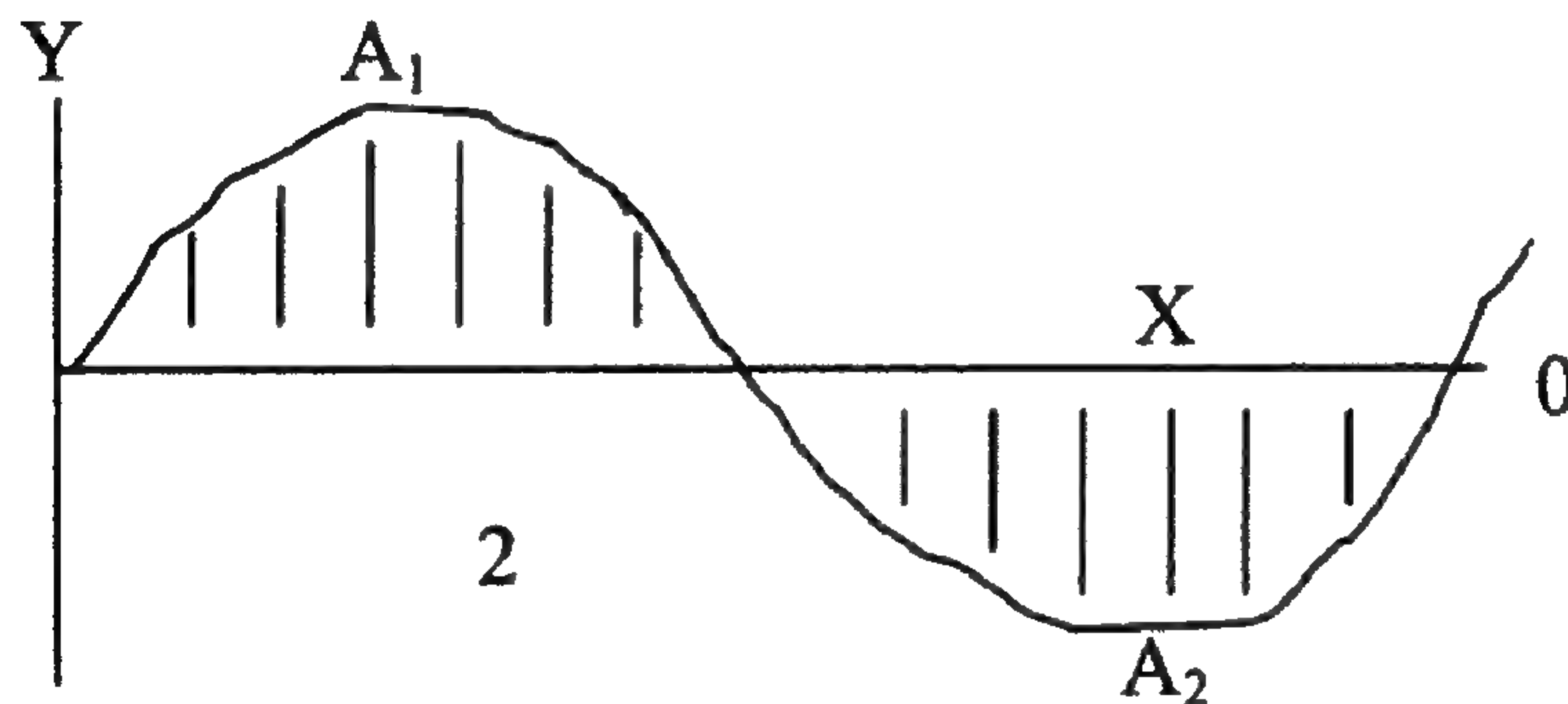
اوجد المساحة المحصورة بين المحور السيني والمنحني

$$y = x^3 - 6x^2 + 8x$$

الحل: ان المنحني يقطع الاعدائي السيني في النقاط

$$y = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x-2)(x-4) \longrightarrow x=0, x=2, x=4$$

وعند رسم المنحني نجد ان هناك مساحتين وكما يلي



$$A_1 = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2$$

$$= \left[\frac{2^4}{4} - 2(2)^3 + 8(2) \right] - 0 = 4 - 16 + 16 = 4$$

$$A_2 = \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx = \left. \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right|_2^4$$

$$= \left(\frac{4^4}{4} - 2 \cdot 4^3 + 4(4)^2 \right) - 4 = 0 - 4 = -4$$

$$A = |A_1| + |A_2| = 4 + 4 = 8$$

وحدة مربعة

مثال 10-4

أوجد المساحة المحصورة بين $x=3, x=0$ وبين المنحنيين

$$y_1 = 3x - x^2, y_2 = 3x^2 - x^3$$

الحل:

نجد المنحنيين يتقاطعان عند النقاط $(3,0), (1,2), (0,0)$ عند

حلهما انيا أي

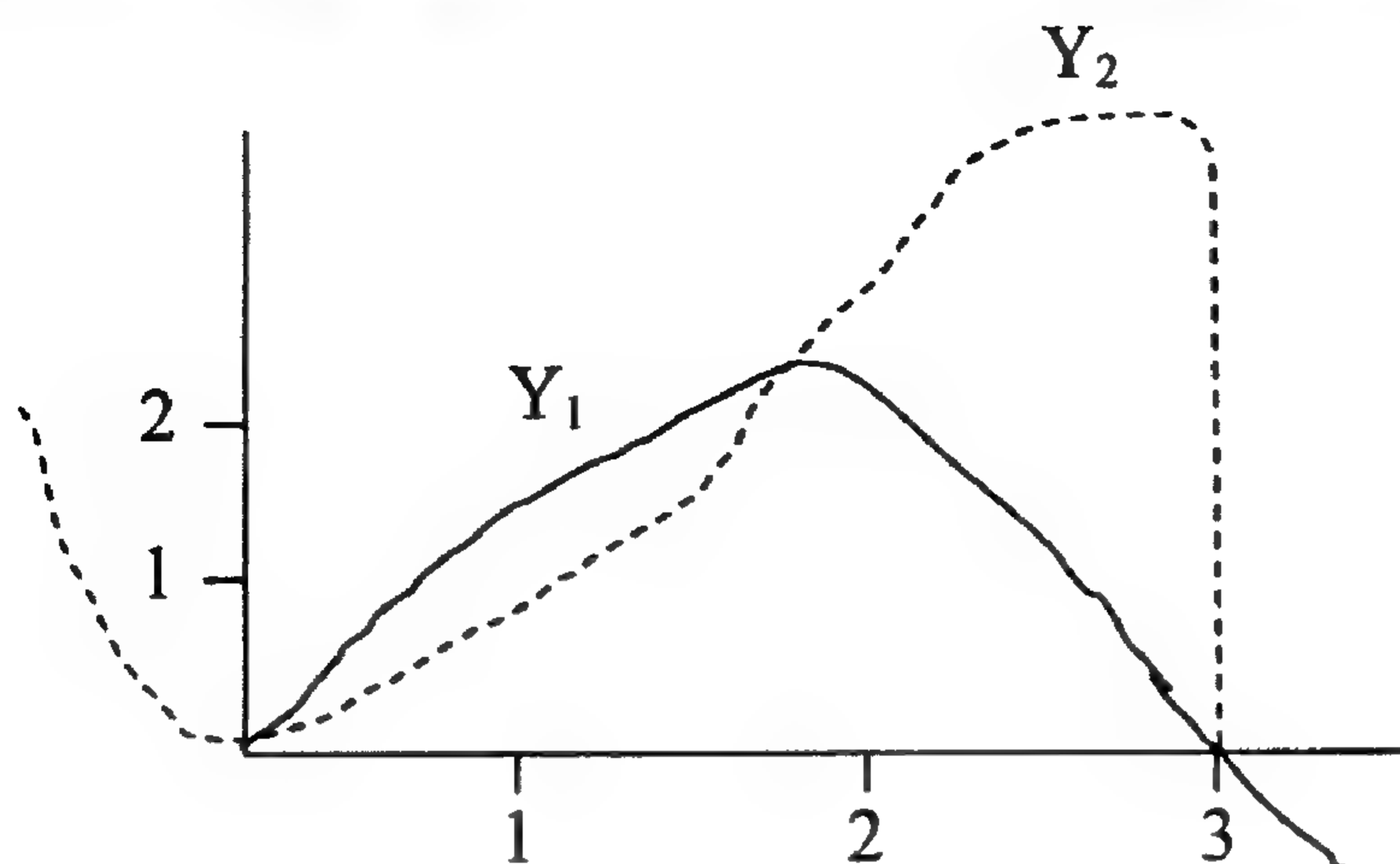
$$y_1 = y_2 \rightarrow 3x - x^2 = 3x^2 - x^3$$

$$x^3 - 4x^2 + 3x = 0$$

$$x(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$x(x-1)(x-3) = 0 \rightarrow x=0, x=1, x=3$$

وعند رسم المنحنيين يكون $y_2 < y_1$ وكما يلي:



$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (y_1 - y_2) dx + \int_1^3 (y_2 - y_1) dx \\ &= \int_0^1 (3x - 4x^2 + x^3) dx + \int_1^3 (4x^2 - x^3 - 3x) dx \\ &= \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} \right]_1^3 \\ &= \frac{5}{12} + \frac{32}{12} = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

2-1-4 حجم الجسم الدوراني Volume of solid of revolution

يقصد بالجسم الدوراني هو المتولد من دوران المنطقة R في مستوي حول مستقيم في نفس المستوي ويطلق عليه محور الدوران. وهناك طريقتان تستعملان لإيجاد حجم الجسم الدوراني وسنوضح هنا أحدها.



طريقة القرص الدوراني Circular dish method

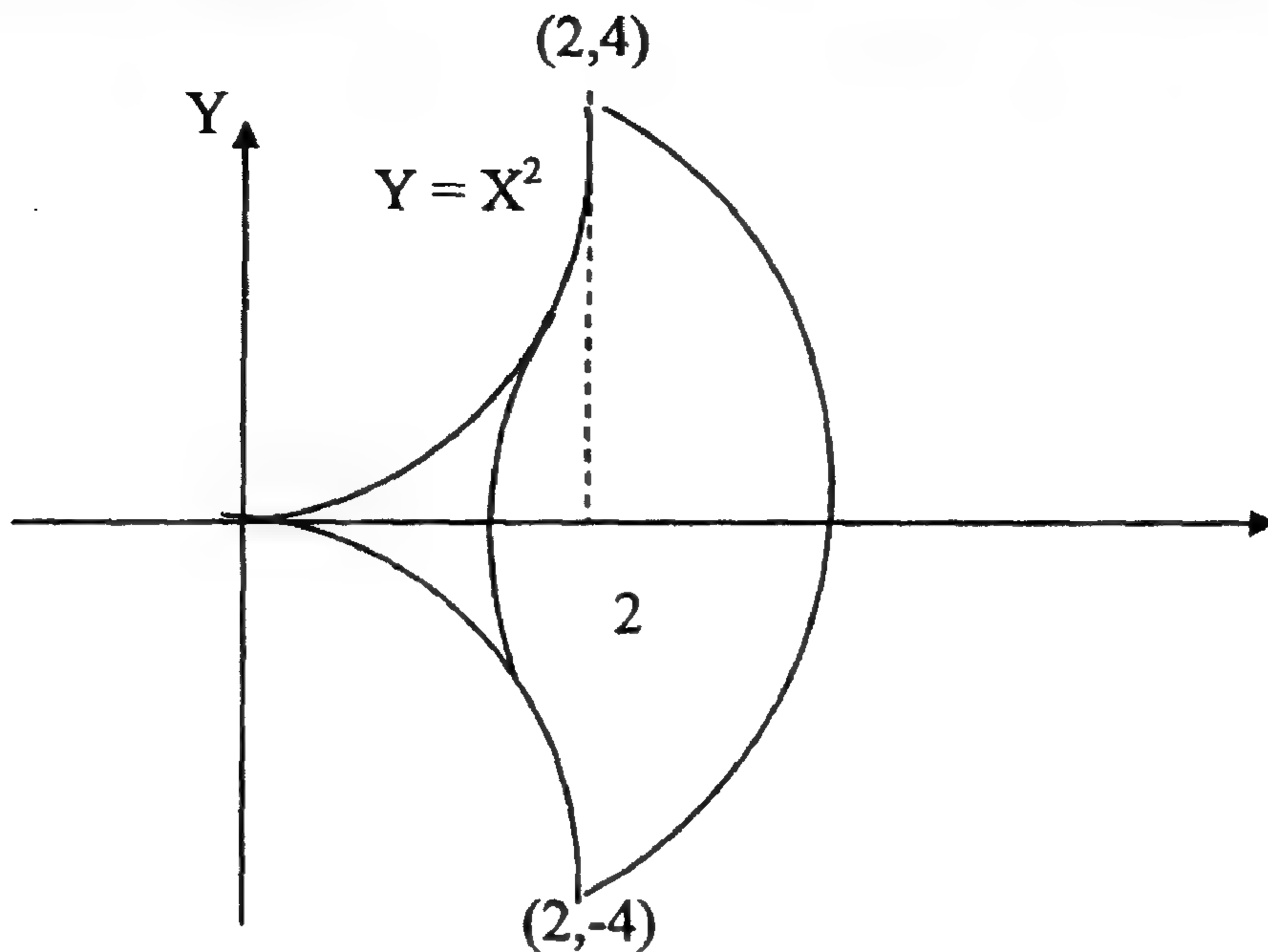
نفرض ان f دالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وان $f(x) \geq 0$ لكل x في $[a, b]$ ولتكن R المنطقة المحددة بمخطط f ومحور السينات والمستقيمين $x=a, x=b$ وليكن S الجسم المتولد من دوران R حول محور السينات ، فان حجم الجسم V المتولد هو

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

اذ ان π تمثل النسبة الثابتة (3.14).

مثال 11-4

اذا كانت R المنطقة التي يحددها $f(x)=x^2$ ومحور السينات والمستقيم $x=2$ اوجد حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة R حول محور السينات



$$V = \pi \int_0^2 [x^2]^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^2 = \frac{32}{5} \pi$$

اما عندما نجد الحجم الدوراني لمساحة بين منحنين هما y_2, y_1 عليهما
بان $0 \leq y_2 \leq y_1$ حول محور السينات فيمكن ايجاده من خلال العلاقة
التالية

$$V = \pi \int_a^b [y_1^2 - y_2^2] dx$$

مثال 4-12

جد الحجم المتولد من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنين

$$y_1 = 2x, y_2 = x^2 \text{ حول محور السينات}$$



الحل:

ان المنطقة المحصورة بين المنحنيين تتحدد من خلال نقاط تقاطع

المنحنيين وهي $y_1 = y_2$

$$2x = x^2 \rightarrow 2x - x^2 = 0 \rightarrow x(2-x)=0$$

$$x=0 \quad \text{او} \quad x=2$$

وعليه فان الحجم الدوراني الذي يمكن ايجاده كما يلي

$$V = \pi \int_0^2 [(2x)^2 - (x^2)^2] dx$$

$$= \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^2$$

$$= \pi \left[\frac{4}{3} (8) - \frac{1}{5} (32) - 0 \right] = \frac{64}{15} \pi$$

3-1-4 حساب طول قوس المنحني Arc length of curve

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة للفترة $[a,b]$ ومشتقتها $f'(x)$ فان طول

القوس للمنحني $y=f(x)$ من a الى b هو:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$



مثال 4-13

جد طول قوس المنحني للدالة $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4x}$ من $x=1$ الى $x=3$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - \frac{1}{4x^2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)^2 + 1 = x^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4} + 1$$

$$= x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2$$

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= \int_1^3 \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4x} \Big|_1^3 = \left(9 - \frac{1}{12}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{53}{6}$$

مثال 4-14

جد طول قوس منحنى الدالة $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$ من $x=0$ الى $x=3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (x^2 + 2)^{1/2} \cdot 2x = x(x^2 + 2)^{1/2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = x^2(x^2 + 2) + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{(x^2 + 1)^2} \, dx = \int_0^3 (x^2 + 1) \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + x \Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} + 3 - 0 = 9 + 3 = 12$$



تمارين الفصل الرابع

1. جد ناتج كل من التكاملات التالية:

a) $\int \left(\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) dx$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

c) $\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^{1/2}} dx$

d) $\int \frac{3x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $\int a^{2x} dx$

f) $\int x \cot x^2 dx$

g) $\int \tan X dx$

h) $\int (1-x)\sqrt{x} dx$

i) $\int \sin \frac{x}{2} dx$

j) $\int \frac{\sin X + \cos X}{\cos X} dx$

k) $\int e^x \cos X dx$

l) $\int \frac{dx}{1 + \cos X}$



m) $\int \frac{dx}{e^x + 1}$

n) $\int \frac{x+2}{x+1} dx$

2. اوجد المسافة تحت المنحنيات الاتية للحدود المبينة لكل منها:

a) $2 \int_0^1 (x^{-2} + 2x^{\frac{1}{2}} + 2) dx$

b) $\int_0^3 \sqrt{3x+1} dx$

c) $\int_{-3}^{-1} (x^3 + 1)^2 x^2 dx$.

3. اوجد المساحة المحصورة بالحدود المبينة في كل مما ياتي:

(a) بين المنحني $y=4x-x^2$ مع محور السينات من $x=1$ الى $x=3$.

(b) بين المنحني $y=9-x^2$ والمستقيم $y=x+3$.

(c) بين المنحني $y=x^4-4x^2$ و $y=4x^2$.

(d) بين المنحني $y=x^2-4$ و $y=8-2x^3$.

4. اوجد ناتج كل من التكاملات التالية:

a) $\int x^3 \sqrt{x+1} dx$

b) $\int (x^2 + 1) \ln x dx$



- c) $\int \frac{\ln X}{x^2} dx$
d) $\int x \cos(2x + 1) dx$
e) $\int \sec^2 X dx$
f) $\int \sin(\ln X) dx$

5. جد الحجم المتولد من دوران المنحنيات ادناه ومحور السينات:

a) $y = 2\sqrt{x}$, $X=4$

b) $y = x - x^2$ محور السينات

c) المنحنيين $y=3x-1$, $y = x^2 + 1$

6. جد طول قوس المنحنيات التالية:

(a) $y^2 = x^3$ من $x = \frac{4}{3}$ الى $x=4$.

(b) $8y = x^4 + 2x^{-2}$ من $x=1$ الى $x=2$.

(c) $y = x^{2/3}$ من $x=-1$ الى $x=8$.

7. اوجد ناتج كل من التكاملات التالية:

a) $\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}$



- b) $\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}$
- c) $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+1}$
- d) $\int \frac{x^2 dx}{x^2+2x+1}$
- e) $\int \frac{\sin X dx}{\cos^2 X + \cos X - 2}$
- f) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

8. اوجد ناتج كل من التكاملات التالية:

- a) $\int \sqrt{x^2-16} dx$
- b) $\int \frac{X dx}{4+x^2}$
- c) $\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}$
- d) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$
- e) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x^2-6x+4}}$





الفصل الخامس المتسلسلات غير المنتهية

5-1 المتتابعة Sequence:

5-2 المتسلسلات اللانهائية Infinite Series

5-3 متسلسلة تايلر ومتسلسلة ماكلورين



المتسلسلات غير المنتهية

5.1 المتتابعة Sequence:

هي الدالة التي مجالها مجموعة الاعداد الطبيعية N والمدى لها مجموعة جزئية S تسمى المتتابعة، فاذا كان المدى للمتتابعة هو مجموعة جزئية من R (مجموعة الاعداد الحقيقية) فان المتتابعة تسمى بالمتتابعة الحقيقية (Real Sequence) ويعبر عنها بالشكل

$$\langle f_n \rangle = \langle f_1, f_2, f_3, \dots, f_n \rangle \forall n \in N$$

مثال 5-1:

ان المتتابعة $\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\rangle$ هي متتابعة حقيقية وتكتب بالشكل $f_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in N$.

5.1.1 طرق كتابة المتتابعة:

(1) بذكر جزء من حدود المتتابعة مثل

$$1. \langle f_n \rangle = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\rangle$$

$$2. \langle f_n \rangle = \langle 1, -1, 1, -1, 1, \dots \rangle$$

(ب) بذكر الحد العام مثل

$$1. f_n = (-1)^{n-1} \cdot 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2. \langle f_n \rangle = \langle 3, -3, 3, -3, \dots \rangle$$

(ج) بذكر جزء من الحدود والحد العام في ان واحد فمثلا

$$\text{لنفرض ان } f_1=5 \text{ و } f_2=7 \text{ فان } f_{n+1} = \frac{1}{3}(f_n - f_{n-1})$$

5.1.2 مدى المتابعة Range of Sequence :

المدى للمتتابعة $\langle f_n \rangle$ هو مجموعة القيم $[f_n : n \in \mathbb{N}]$ التي تحتوي على حدود مختلفة بدون تكرار ودون اعتبار لموقع العنصر.

5.1.3 المتتابعة المتقاربة:

تكون المتتابعة متقاربة (محددة) اذا كانت لها نقطة غاية واحدة.
وتكون المتتابعة متقاربة (ليست محددة) عندما لا يكون لها نقطة غاية.

مثال 5-2

اوجد المدى للمتتابعة الاتية

$$\langle f_n \rangle = \langle 3, -3, 3, -3, 3, -3 \rangle$$

المدى هو $[3, -3]$

ما هو مدى المتابعة $\langle g_n \rangle = \langle 5, 5, 5, 5, 5, \dots \rangle$

المدى للمتابعة هو [5]

5.1.4 غاية المتابعة Limit of a Sequence

المتابعة $\langle f_n \rangle$ يقال لها غاية L لكل n كبيرة ولكل $\epsilon > 0$ عدد صحيح

موجب m يعتمد على ϵ فان:

$$|f_n - L| < \epsilon, \forall n \geq m$$

ويعبر عن ذلك بالشكل $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = L$

بين ان المتابعة $f_n = \frac{1}{n}, \forall n \in N$ متقاربة للصفر.

$$\therefore |f_n - L| < \epsilon$$

$$\therefore \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \text{ or } n > \frac{1}{\epsilon}$$

فلنفرض ان m أي عدد صحيح موجب اكبر من $\frac{1}{\epsilon}$ فان

$$|f_n - 0| < \epsilon, \forall n \geq m$$

اي ان $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$.



مثال 5-5:

بين ان المتتابعة $\langle f_n \rangle$ متقاربة الى $\frac{1}{2}$ اذ ان

$$f_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 + 5}, \forall n \in N$$

$$|f_n - L| < \epsilon \rightarrow \left| \frac{n^2 + 1}{2n^2 + 5} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$$

$$\frac{3}{2(2n^2 + 5)} < \epsilon \rightarrow \frac{3}{4n^2} < \epsilon$$

$$i.e \quad n^2 > \frac{3}{4\epsilon} \quad \therefore n > \sqrt{\frac{3}{4\epsilon}}$$

لنفرض ان m عدد صحيح اكبر من $\sqrt{\frac{3}{4\epsilon}}$ وعليه فان

$$\left| f_n - \frac{1}{2} \right| < \epsilon, \forall n \geq N$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \frac{1}{2}$$

اي ان المتتابعة تقترب الى $\frac{1}{2}$

مثال 5-6:

المتتابعة $\langle f_n \rangle = \langle 1, -1, 1, -1, \dots \rangle$ ليست متقاربة لان

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 1$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = -1$ اي ان $-1 \leq f_n < 1, \forall n \in N$. فانها

ليست متقاربة.

مثال 5-7:

المتابعات التالية غير محددة وليست متقاربة

$$1. f_n = n^3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2. f_n = -2n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$3. f_n = (-1)^n n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

مثال 5-8

التالية $f_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ متقاربة وتقترب من الصفر لان المتابعة ستحدد بالشكل $0 \leq f_n \leq 1$ وان الصفر هو نقطة الغاية الوحيدة للمتابعة اي تقترب من الصفر ويمثل الغاية لها.

5-1-5 المتابعة المتباعدة:

المتابعة $\langle f_n \rangle$ يقال لها متباعدة وتتباعده الى $+\infty$ اذا لكل عدد موجب N مهما كان كبيرا يوجد عدد صحيح موجب m بحيث ان

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = +\infty \text{ اي } f_n > N, \forall n \geq m$$

ويقال لها متباعدة الى $-\infty$ اذا لكل عدد سالب M مهما كان صغيرة

يوجد عدد صحيح m بحيث ان

$$f_n < M \quad \forall n \geq m$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = -\infty$$

بين ان المتتابعة التالية متقاربة الى $\frac{3}{4}$

$$f_n = \frac{3n-1}{4n+5}$$

نفرض ان $\epsilon > 0$ اي عدد

$$\left| f_n - \frac{3}{4} \right| = \left| \frac{3n-1}{4n+5} - \frac{3}{4} \right| = \frac{19}{4(4n+5)}$$

$$\left| f_n - \frac{3}{4} \right| < \epsilon$$

كلما كانت $\epsilon < \frac{19}{4(4n+5)}$ فان $n > \frac{1}{4} \left(\frac{19}{\epsilon} - 5 \right)$

افرض ان $m < \frac{1}{4} \left(\frac{19}{\epsilon} - 5 \right)$ اذ ان m عدد صحيح موجب فان

$m > \frac{1}{4} \left(\frac{19}{\epsilon} - 5 \right) \in N$ اي ان $\left| f_n - \frac{3}{4} \right| < \epsilon, \forall n \geq m$ وان المتتابعة متقاربة الى $\frac{3}{4}$.

5.2 المتسلسلات اللانهائية Infinite Series

اذا كانت $\langle a_n \rangle$ اي متتابعة فان متتابعة المجاميع الجزئية للمتتابعة

$\langle a_n \rangle$ تسمى بالمتسلسلة (series) اي ان

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.

.

.

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

ان المجموع $\sum_{i=1}^n a_i$ يسمى متسلسلة n من الحدود والمجموع $\sum_{i=1}^n a_i$ يسمى متسلسلة لانهاية (Infinite Series).

5.2.1 المتسلسلة المتقاربة وغير المتقاربة:

تسمى المتسلسلة $S = \sum_{i=1}^n a_i$ متقاربة (convergent) وتكتب بالشكل $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ وان s عدد الحدود ، واذا اقترب المجموع $\sum a_n$ من $+\infty$ او $-\infty$ عندما $n \rightarrow \infty$ فان المتسلسلة تسمى متباعدة (Divergent) غير متقاربة وتكتب $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ او $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ ، واذا كانت السلسلة غير متقاربة وليست متباعدة فانها تسمى متذبذبة (Oscillate) وبصورة عامة اذا كانت الغاية $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = k$ فان المتسلسلة تكون متقاربة.

مثال 5-10:

$$S_n = \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

وباستخدام الكسور الجزئية فان

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

وبعد ايجاد قيمتي A, B تصبح بالشكل

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

وعليه يمكن كتابة المتسلسلة بالشكل

$$\begin{aligned} S_n &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} = 1$$

وعليه فان المتسلسلة متقاربة.

مثال 11-5: افرض ان

$$S_n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

فاذا كانت $S_1=1, S_2=2, S_m=m$ فان $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ اي ان

الغاية غير معرفة فالمتسلسلة متباعدة وب نفس الطريقة يمكن بيان ان

المتسلسلات $\sum_{n=1}^{\infty} (-5)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$.

افرض ان $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ والتي تكتب بالشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

اي ان $\langle S_n \rangle = \langle 1, 0, 1, 0, \dots \rangle$ هذا يعني ان $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ عندما يكون عدد الحدود فردي وان $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ عندما يكون عدد الحدود زوجي ، وعليه فالمتسلسلة متذبذبة لا تقترب الى قيمه واحدة.

مثال 13-5: لنفرض لدينا المتسلسلة العددية التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n \quad \dots (1)$$

$$S_n = n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1 \quad \dots (2)$$

وبجمع الشكليين (1) و (2) نحصل على:

$$2S_n = (1+n) + (1+n) + \dots + (1+n)$$

$$2S_n = n(n+1)$$

اي ان الحد العام $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ وان $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}n(n+1) = \infty$

فالمتسلسلة متباعدة.

المتسلسلات
غير المنتهية

5.2.2 اختبار النسبة للتقارب،

إذا كانت $\sum a_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة وكان:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{a_n} \text{ فان}$$

1. إذا كان $r > 1$ فان المتسلسلة متباعدة.

2. إذا كان $r < 1$ فان المتسلسلة متقاربة.

3. المتسلسلة غير معرفة إذا كان $r = 1$..

مثال 5-14

اختبر كل من المتسلسلات التالية متباعدة ام متقاربة باستخدام

اختبار النسبة.

$$1) \sum \frac{3^{2n}}{n!}$$

$$2) \sum \frac{2^n}{n^2}$$

$$3) \sum \frac{3^n}{n2^n}$$

$$1) a_n = \frac{3^{2n}}{n!}, a_{n+1} = \frac{3^{2(n+1)}}{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{2(n+1)}}{n+1} \cdot \frac{n!}{3^{2n}} = \frac{3^{2n} \cdot 3^2}{(n+1)n!} = \frac{9}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n+1} = 0 < 1$$

فالمسلسلة متقاربة.

$$2) a_n = \frac{2^n}{n^2}, a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} \cdot n^2}{(n+1)^2 \cdot 2^n} = \frac{2n^2}{(n+1)^2} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 2 \cdot 1 = 2 > 1$$

فالمتسلسلة متباعدة.

$$3) a_n = \frac{3^n}{n \cdot 2^n}, a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1} \cdot n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1} \cdot 3^n} = \frac{3n}{2(n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2(n+1)} = \frac{3}{2} > 1$$

فالمتسلسلة متباعدة.

3.5 متسلسلة تايلر ومتسلسلة ماكلورين

Taylor's & Maclaurin's series

إذا كانت $f(x)$ دالة وان جميع درجات المشتقة لها معروفة عندما $x=0$

او عندما $x=a$ وان تلك الدالة يمكن تمثيلها بالمتسلسلة التالية:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0) \cdot x}{1} + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2!} + \frac{f'''(0) \cdot x^3}{3!} + \dots +$$

فان $f(x)$ تسمى بمتسلسلة ماكلورين.

واذا تم تمثيل تلك الدالة بالمتتالية التالية عندما $x=a$ أي ان:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots$$

فان $f(x)$ تسمى بمتسلسلة تايلر.

مثال 5-15

اكتب الدالة $f(x) = \sin x$ بقوى x باستخدام متسلسلة ماكلورين:

$$f(x) = \sin x$$

$$f(0) = \sin(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \rightarrow f'''(0) = -1$$

أي ان

$$\sin(x) = 0 + 1.x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{-1}{3}x^3 + \dots$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

اكتب الدالة $e^{x/2}$ بقوى $(x-2)$ باستخدام متسلسلة تايلر.

$$f(x) = e^{x/2} \rightarrow f(2) = e$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2} \rightarrow f'(2) = \frac{1}{2}e$$

$$f''(x) = \frac{1}{4}e^{x/2} \rightarrow f''(2) = \frac{1}{4}e$$

أي

$$e^{x/2} = e \left[1 + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4} \frac{(x-2)^2}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{(x-2)^{n-1}}{n-1} + \dots \right]$$

تمارين الفصل الخامس

1. اختبر المتسلسلات الآتية تقاربية أم تباعدية.

a) $1 + \frac{2}{3} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)} + \dots$

b) $\sum \frac{1}{5^{n-1}} \cdot \frac{3^{n-1}}{n^2}$

c) $\sum \frac{n^2}{2^n}$

d) $\sum \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{3}{2}\right)^n$

e) $\sum \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}$

2. ما هي قيم X التي تتقارب من أجلها المتسلسلة

$$X + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$$

مستخدما اختبار النسبة.

3. استخدم اختبار النسبة لمعرفة فيما اذا كانت المتسلسلات الآتية

متقاربة أم متباعدة

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$
- b) $\sum \frac{1}{n^2+1}$
- c) $\sum \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$
- d) $\sum \frac{n}{n^2+1}$
- e) $\sum \frac{n^2}{2^n}$
- f) $\sum \frac{1}{10^n}$

4. اكتب الدوال التالية بقوى X باستخدام متسلسلة ماكلورين

- a) $f(x) = \ln(1+x)$
- b) $f(x) = \cos(x)$
- c) $f(x) = \sin^2 X$
- d) $f(x) = e^x$
- e) $f(x) = \tan(x)$

5. اكتب الدالة $f(x) = \ln X$ بقوى $(x-2)$ باستخدام متسلسلة تايلر.

6. اكتب $\cot(x)$ بقوى $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ باستخدام متسلسلة تايلر.

7. اكتب $\cos(x)$ بقوى $\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ باستخدام متسلسلة تايلر.

8. استخدام اختبار النسبة للمتسلسلات الآتية وتحديد قيم x التي يجعلها متباعدة او متقاربة.

a)
$$\sum \frac{(-1)^n (x+1)^n}{2^n n^2}$$

b)
$$\sum \frac{n! (x-3)^n}{1 * 3 \dots (2n-1)}$$

c)
$$\frac{1}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{11} + \dots + \frac{x^n}{3+2^n} + \dots$$





الفصل السادس

المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى

First order Differential Equation

6-1 مفهوم المعادلة التفاضلية

6-2 الحل العام والحل الخاص

6-3 حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى



المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى

6.1 مفهوم المعادلة التفاضلية:

هي المعادلة التي تحوي على مشتقة او اكثر فلو تأملنا الامثلة الاتية

$$1. \frac{dy}{dX} = X + 2$$

$$2. \frac{d^2 y}{dX^2} + 5 \frac{dy}{dX} + 4y = 0$$

$$3. X^2 y' + y = 3$$

$$4. y''' + 3(y'')^2 + y' = \sin X$$

$$5. (y'')^2 + (y')^3 + 6y = 3X^2$$

$$6. \frac{\partial Z}{\partial X} = Z + X \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$7. \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 3X^2 + y$$

فاذا احتوت المعادلة التفاضلية على متغير مستقل واحد كما في المعادلات (1-5) ومشتقات اعتيادية فالمعادلة تسمى بمعادلة تفاضلية اعتيادية ، اما اذا كان هناك اكثر من متغير مستقل واحد كما في المعادلتين 6 و 7 وفيها مشتقة جزئية فتسمى معادلة تفاضلية جزئية ، وان مرتبة المعادلة التفاضلية تمثل اعلى درجة مشتقة موجودة في المعادلة فالمعادلات

من المرتبة الأولى

(6,3,1) هي من المرتبة الأولى في حين ان المعادلات (7,5,2) هي معادلات من المرتبة الثانية ، اما المعادلة 4 فهي من المرتبة الثالثة . اما درجة المعادلة التفاضلية فهي القوة المرفوعة لها اعلى درجة مشتقة (اس اعلى مشتقة) فان جميع المعادلات السابقة هي من الدرجة الأولى ما عدا المعادلة 5 فهي من الدرجة الثانية .

6-2 الحل العام والحل الخاص:

من المؤلف ان يكون للمعادلة التفاضلية حلاً تحوي على ثوابت اختيارية فمثلاً

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ ويسمى هذا الحل بالحل العام (General solution) ولو اعطينا قيم محددة للثوابت فمثلاً عندما $A=B=C=0$ فان $y=0$ واذا كان $A=0, B=2, C=5$ فان الحل سيكون $y=2x+5$ واذا كان $A=1, B=2, C=3$ فان الحل يكون $Y=x^2+2x+3$ فتسمى الحلول الثلاثة حلاً خاصاً (particular solution).

مثال 6-1:

بين ان $y = \sin x$ تمثل حل للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$

$$y = \sin x \rightarrow y' = \cos x \quad y'' = -\sin x$$

اذن

$$\sin x + \sin x = 0$$

فان $y = \sin x$ تمثل حل للمعادلة التفاضلية.

مثال 2-6:

بين ان $y = x^2 + c$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y' = 2x$ وما هي قيمة c التي تجعل الحل ماراً بالنقطة $(4, 1)$.

$$y = x^2 + c \rightarrow y' = 2x$$

وبالتعويض عن $x=1$ ، $y=4$ نحصل على

$$4 = 1 + c \rightarrow c = 3$$

6.3 حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى

Solution of First Ordinary Differential Equation

هناك عدة طرق لحل هذا النوع من المعادلات ويعتمد ذلك على نوع المعادلة التفاضلية وفيما يلي تلك الطرق.

6.3.1 فصل المتغيرين variables separable

إذا أمكن وضع المعادلة التفاضلية بالشكل التالي:

$$\frac{dy}{dx} = M(x).N(y) \dots\dots\dots (6-4)$$

إذا أن $M(x)$ دالة لـ x وأن $N(y)$ دالة لـ y . ولحل هذا النوع من المعادلات نضع المعادلة السابقة (6-4) بالشكل

$$\frac{dy}{N(y)} = M(x) dx$$

أي أن المتغيرات انفصلت. وياخذ التكامل للطرفين

$$\int \frac{dy}{N(y)} = \int M(x) dx + C$$

إذا أن C ثابت اختياري

مثال 3-6:

أوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$1) \quad \frac{dy}{dx} = x$$

$$dy = x dx$$



$$\int dy = \int x dx + c$$

$$y = \frac{x^2}{2} + c$$

$$2) \frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$$

عندما $y=0$, $x=0$

$$\frac{dy}{dx} e^{2x} \cdot e^y$$

$$\frac{dy}{e^y} = e^{2x} dx$$

$$e^{-y} dy = e^{2x} dx$$

$$\int e^{-y} dy = \int e^{2x} dx + c$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

وعندما $y=0$ ، $x=0$ فإن

$$-e^0 = \frac{1}{2} e^0 + c \Rightarrow c = -1 - \frac{1}{2} = -3/2$$

وعليه فإن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو:

$$-e^{-y} = \frac{1}{2} e^{2x} - 3/2$$

$$e^{-y} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} e^{2x}$$



$$3) \quad \frac{dy}{dx} = -2x \tan y$$

$$x=0, y = \frac{\pi}{2} \text{ عندما}$$

$$\frac{dy}{\tan y} = -2x dx$$

$$\cot y dy = -2x dx$$

$$\ln \sin y = -x^2 + c$$

$$y = \frac{\pi}{2}, x=0 \text{ وبالتعويض عن}$$

$$\ln \sin \frac{\pi}{2} = c \Rightarrow c = 0$$

فان الحل الخاص للمعادلة هو

$$\ln \sin y = -x^2$$

$$4) \quad \frac{dy}{dx} + xy = xy^2$$

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 - xy = xy(y-1)$$

$$\frac{dy}{y(y-1)} = x dx$$

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int x dx$$

المعادلات التفاضلية
من المرتبة الأولى

وباستخدام الكسور الجزئية فان

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} = \frac{A(y-1) + By}{y(y-1)} = \frac{Ay + By - A}{y(y-1)} = \frac{y(A+B) - A}{y(y-1)}$$

$$A+B=0 \dots\dots\dots (1)$$

$$-A=1 \dots\dots\dots (2) \quad B=1$$

أي ان

$$\int \left(\frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1} \right) dy = \int x dx + c$$

$$-\ln y + \ln(y-1) = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\ln \frac{y-1}{y} = \frac{x^2}{2} + c$$

6.3.2 المعادلة التفاضلية المتجانسة

Equation Homogeneous Differential:

وهي المعادلة التفاضلية التي يمكن وضعها بالشكل الآتي:

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

ولحل هذا النوع من المعادلات نفرض ان:

$$y = vx$$

وبأخذ التفاضل بالنسبة لـ x فإن

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

أي أن

$$x \frac{dv}{dx} + v = g(v)$$

وبفصل المتغيرات ينتج:

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

وبأخذ تكامل الطرفين يكون الحل

$$\int \frac{dv}{g(v) - v} = \int \frac{dx}{x} + c$$

ثم يتم التعويض عن $v = \frac{y}{x}$ للحصول على المعادلة بدلالة المتغيرين x, y .

مثال 4-6:

أوجد الحل للمعادلات التفاضلية التالية

$$1) \quad y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$



$$y' = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

وبفرض ان $y=vx$ فان $\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{x}{vx} + \frac{vx}{x}$$

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{1}{v} + v$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$$

$$v dv = \int \frac{dx}{x} + c$$

$$\frac{v^2}{2} = \ln x + c$$

$$v^2 - 2 \ln x = 2c$$

2) $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$

$$2 \frac{yy'}{x} - \frac{y^2}{x^2} + 1 = 0$$

$y = vx \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$

وبالتعويض ينتج

$$2v(xv' + v) - v^2 + 1 = 0$$

وبعد ترتيب المعادلة نحصل على

$$2xvv' + v^2 + 1 = 0$$

$$\frac{2v dv}{1 + v^2} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln(1 + v^2) = -\ln x + c$$

$$\ln(1 + v^2) + \ln x = c$$

$$\ln x(1 + v^2) = c$$

$$x(1 + v^2) = e^c = c_1$$

$$x \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) = c_1$$

$$x \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2} \right) = c_1$$

$$x^2 + y^2 = c_1 x$$



$$3) \quad (x^2 + 3y^2)dx - 2xydy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy} = \frac{x}{2y} + \frac{3y}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = v + xv' \leftarrow y = vx$$

نفرض ان

$$xv' + v = \frac{1}{2v} + \frac{3}{2}v$$

$$xv' = \frac{1}{2v} + \frac{v}{2} = \frac{1+v^2}{2v}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2v dv}{1+v^2}$$

$$\text{Ln} x = \text{Ln}(1+v^2) + c_1$$

$$\text{Ln} \frac{x}{1+v^2} = c_1$$

$$\frac{x}{1+v^2} = e^{c_1} = c$$

وبالتعويض عن v نحصل على المعادلة الآتية

$$x^2 = c(x^2 + y^2)$$

6.3.3 المعادلة التفاضلية الخطية

Linear differential equation

وهي المعادلة التي تكون بالشكل الآتي:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x) \dots\dots\dots (6-3-1)$$

حيث ان $p(x)$ ، $Q(x)$ هما دوال لـ x . ولحل هذه المعادلة نحاول إيجاد دالة مثل $I(x)$ بحيث عند ضرب المعادلة بهذه الدالة يصبح الطرف الأيسر مشتقة حاصل ضرب $I(x).y$ فان:

$$I(x) \frac{dy}{dx} + I(x)P(x).y = I(x).Q(x)$$

أي ان

$$I(x) \frac{dy}{dx} + I(x)P(x).y = \frac{d(I.y)}{dx} \dots\dots\dots (6-3-2)$$

وعند فتح الطرف الأيمن في العلاقة (6-3-2) واختصار الحدود

ينتج:

$$\frac{dI(x)}{dx} = I(x)P(x)$$

وبفضل المتغيرات



$$\frac{dI(x)}{dx} = P(x)dx$$

$$\ln I(x) = \int P(x)dx + \ln c$$

$$I(x) = ce^{\int p(x)dx}$$

وعندما $c=1$ فإن

$$I(x) = e^{\int p(x)dx}$$

وتسمى هذه الدالة بالعامل التكامل (Integration factor)

وباستعمال هذا العامل تصبح العلاقة (1-3-6) كما يلي:

$$\frac{d(I(x).y)}{dx} = I(x).Q(x)$$

وبحلها باستخدام التكامل

$$I(x).y = \int I(x)Q(x)dx = c$$

مثال 5-6:

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

$$1. \quad \frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$$

$$P(x) = 1 \Rightarrow \int P(x)dx = x$$

فان العامل التكامل I.F هو e^x

ويضرب طرفي المعادلة التفاضلية بالعامل التكاملتي يتتج:

$$\left(\frac{dy}{dx} + y\right)e^x = 1$$

$$\frac{d}{dx}(ye^x) = 1$$

$$ye^x = x + c$$

$$2) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$$

$$P(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \int P(x)dx = \int \frac{1}{x} dx = \text{Lnx}$$

$$\text{I.F} = e^{\text{Lnx}} = x$$

$$x\left(\frac{dy}{dx} + y \cdot \frac{1}{x}\right) = x^2 x$$

$$xy = \frac{1}{4}x^4 + c$$

$$3) \quad x \frac{dy}{dx} + 2y = x^4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} = \frac{x^4}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^3$$

$$P(x) = \frac{2}{x} \rightarrow \int P(x)dx = \int \frac{2}{x} dx = 2\text{Lnx}$$



$$I.F = e^{2\ln x} = x^2$$

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y \right) = x^5$$

$$\frac{d}{dx} (yx^2) = x^5$$

$$yx^2 = \frac{x^6}{6} + c$$

$$4) \quad 1 + (x \tan y - \sec y) \frac{dy}{dx} = 0$$

وبضرب طرفي المعادلة بـ $\frac{dx}{dy}$ ينتج:

$$\frac{dx}{dy} + x \tan y = \sec y$$

ولحل هذه المعادلة التفاضلية فهناك أسلوبان هما

1. نبدل x محل y و y محل x .

2. نأخذ العامل التكاملي بالنسبة لـ y بدل x .

وسنستخدم الأسلوب الثاني:

$$P(y) = \tan y \rightarrow \int P(y) dy = \int \tan y dy = \ln \sec y$$



$$I.F = e^{\text{Ln Sec } y} = \text{Sec } y$$

$$\sec y \left(\frac{dx}{dy} + x \tan y \right) = \sec y \sec y$$

$$\frac{d}{dy} (x \sec y) = \sec^2 y$$

$$x \sec y = \tan y + c$$

6-3-3-1 معادلة برنولي Bernoulli's Equation

ان المعادلة التالية تعرف بمعادلة برنولي

$$\frac{dy}{dX} + Py = Qh^n$$

اذ ان P, Q دوال لـ X فقط، n ثابت. وهناك حالتان لهذه المعادلة هما :

أ- عندما $n=1$ تكون المعادلة من نوع المنفصلة (Separable) وتحل بطريقة فصل المتغيرين .

ب- عندما $1 \neq n$ نضرب طرفي المعادلة في y^{-n} فيكون الناتج

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P y^{1-n} = Q$$

لنفرض الان ان $Z = y^{1-n}$ فيكون

$$\frac{dZ}{dX} = (1-n) y^{-n} \frac{dy}{dX}$$



$$\frac{1}{1-n} \frac{dZ}{dX} + PZ = Q$$

وبالتعويض يكون

$$\frac{dZ}{dX} + (1-n)PZ = (1-n)Q$$

او

وان المعادلة الاخيرة هي معادلة خطية لـ Z ونواصل الحل بايجاد

$$I.F = e^{\int (1-n)P dX}$$

مثال 6-6

$$\frac{dy}{dX} + \frac{y}{X} = y^2 \quad \text{حل المعادلة التالية}$$

$$y^{-2} \frac{dy}{dX} + \frac{1}{Xy} = 1 \quad \text{نضرب المعادلة بـ } y^{-2} \text{ تكون}$$

$$\text{نفرض ان } Z = y^{-1} \text{ فتكون}$$

$$\frac{dZ}{dX} = -y^{-2} \frac{dy}{dX}$$

$$\frac{dZ}{dX} - \frac{Z}{X} = -1 \quad \text{او} \quad -\frac{dZ}{dX} + \frac{Z}{X} = 1 \quad \text{وبالتعويض يكون}$$

$$\therefore P(X) = -\frac{1}{X}, \quad \int P(X) dX = -\int \frac{dX}{X} = -\ln|X|$$

$$I.F = e^{\int P(X) dX} = e^{-\ln|X|} = \frac{1}{X} \quad \text{اي ان}$$

وبالضرب بالعامل التكامل ينتاج

$$1 + Xy \ln|X| = Cy \quad \text{أو} \quad \frac{Z}{X} = -\ln|X| + C$$

مثال 6-7

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dX} - y \tan X = \frac{\sin X \cos^2 X}{y}$$

نضرب المعادلة في y^{-2} نحصل على

$$y^2 \frac{dy}{dX} - y^3 \tan X = \sin X \cos^2 X$$

افرض ان $Z=y^3$ فان $\frac{dZ}{dX} = 3y^2 \frac{dy}{dX}$ وبالتعويض

$$\frac{1}{3} \frac{dZ}{dX} - Z \tan X = \sin X \cos^2 X$$

$$\frac{dZ}{dX} - 3Z \tan X = 3 \sin X \cos^2 X$$

$$\therefore P(X) = -3 \tan X, \int p(X) dX = -3 \tan X dX = -3 \ln|\cos X|$$

$$\therefore I.F = e^{\int P(X) dX} = e^{\ln|\cos^3 X|} = \cos^3 X$$

$$\therefore \frac{d}{dX} (Z \cos^3 X) = 3 \sin X \cos^5 X$$

$$Z \cos^3 X = -\frac{3}{6} \cos^6 X + C$$

$$2y^3 \cos^3 X + \cos^6 X = B$$

6.3.4 المعادلة التفاضلية التامة Exact differential equation

إذا كانت المعادلة التفاضلية من النوع

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \dots\dots\dots(6-3-3)$$

بحيث أن $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ فإن المعادلة التفاضلية تسمى تامة

وإن أسلوب الحل يتلخص بإيجاد دالة مثل $f(x, y)$ بحيث أن

$$M(x, y) = \frac{df(x, y)}{dx}, \quad N(x, y) = \frac{df(x, y)}{dy}$$

مثال 6-8:

أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية:

$$y^2 dx + 2xy dy = 0$$

$$M(x, y) = y^2 \rightarrow \frac{dM}{dy} = 2y$$

$$N(x, y) = 2xy \rightarrow \frac{dN}{dx} = 2y$$

فإن المعادلة التفاضلية تامة

ولغرض إيجاد الدالة $f(x, y)$ نلاحظ أن

$$d(xy^2) = 2xy dy + y^2 dx$$

وبالتعويض ينتج

$$d(xy^2) = 0$$

$$xy^2 = c$$

$$2) \quad (3x^2y + 2xy)dx + (x^3 + x^2 + 2y)dy = 0$$

$$M(x, y) = 3x^2y + 2xy \rightarrow \frac{dM}{dy} = 3x^2 + 2x$$

$$N(x, y) = (x^3 + x^2 + 2y) \rightarrow \frac{dN}{dx} = 3x^2 + 2x$$

$$\text{وبما ان } \frac{dN}{dx} = \frac{dM}{dy} \text{ فالمعادلة تامة.}$$

$$\frac{df(x, y)}{dx} = M(x, y) = 3x^2y + 2xy \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{df(x, y)}{dy} = N(x, y) = x^3 + x^2 + 2y \dots\dots\dots (2)$$

وباجراء عملية التكامل للمعادلة الاولى نحصل على

$$f(x, y) = x^3y + x^2y \dots\dots\dots (3)$$

ثم نكتب المعادلة (3) بالشكل

$$f(x, y) = x^3 y + x^2 y + \phi(y) \dots \dots \dots (4)$$

اذ اننا نود معرفة $\Phi(y)$ وبايجاد المشتقة لـ y للمعادلة (4) ينتج:

$$\frac{df(x, y)}{dy} = x^3 + x^2 + \phi'(y) \dots \dots \dots (5)$$

وبمساواة معادلة (5) مع معادلة (2) ينتج:

$$x^3 + x^2 + 2y = x^3 + x^2 + \phi'(y)$$

نجد ان $\phi'(y) = 2y$ أي ان

$$\phi(y) = y^2 + c$$

وتكون الدالة $f(x, y)$ كما يلي

$$f(x, y) = x^3 y + x^2 y + y^2 + c$$

التي تفاضلها هو $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ ويصبح الحل العام هو

$$x^3 y + x^2 y + y^2 = c$$

$$3) \quad (xy \cos xy + \sin xy) dx + (x^2 \cos xy + e^y) dy = 0$$

$$M(x, y) = xy \cos xy + \sin xy$$

$$\frac{dM}{dy} = -x^2 y \sin xy + x \cos xy + x \cos xy$$

$$= 2x x \cos xy - x^2 y \sin xy$$

$$N(x, y) = x^2 \cos xy + e^y$$

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= -x^2 \sin xy \cdot y + 2x \cos xy \\ &= 2x \cos xy - x^2 y \sin xy \end{aligned}$$

وبما ان $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ فالمعادلة التفاضلية تامة

$$\frac{df(x, y)}{dx} = xy \cos xy + \sin xy$$

$$\frac{df(x, y)}{dy} = x^2 \cos xy + e^y$$

وبتكامل المعادلة الاخيرة بالنسبة لـ y ينتج:

$$f(x, y) = x \sin xy + e^y + \phi(x)$$

وبتفاضل هذه المعادلة بالنسبة لـ x ينتج:

$$\frac{df(x, y)}{dx} = xy \cos xy + \sin xy + \phi'(x)$$

أي ان

$$xy \cos xy + \sin y = xy \cos xy + \sin xy + \phi'(x)$$

اذن

$$\phi'(x) = 0 \rightarrow \phi(x) = c$$

$$f(x, y) = x \sin xy + e^y + c$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية هي:

$$x \sin xy + e^y = c$$

تمارين الفصل السادس

اوجد الحل للمعادلات التفاضلية التالية:

$$1. \frac{dy}{dx} + xy = xy^2$$

$$2. \sin x \frac{dy}{dx} + 2y \cos x = \cos x$$

$$3. \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{x+1}{(x+2)^2}$$

$$4. \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - (x+y-1) \frac{dy}{dx} + x(y-1) = 0$$

$$5. (x \ln x) y' = y$$

$$6. (x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0$$

$$7. y' = \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{y-x}{x}\right)$$

$$8. x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2y \frac{dy}{dx} - x = 0$$

$$9. (x + y + 1)dx + (y - x - 3)dy = 0$$

$$10. \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2y - 2}{3x + y - 5}$$

$$11. \frac{dy}{dx} + y \cot x = \sin x$$

$$12. xdy + ydx = \sin x dx$$

$$13. (\sin^2 x - y)dx - \tan x dy = 0$$

$$14. \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2$$

$$15. \frac{dy}{dx} - y \tan x = \frac{\sin x \cos^2 x}{y^2}$$

$$16. 2xydx + (x^2 + 1)dy = 0$$

$$17. (2xydx) + (x^2 + 1)dy = 0$$

$$18. [x \cos(x + y) + \sin(x + y)]dx + x \cos(x + y)dy = 0$$

$$19. (2x + y + 1)dx + (x + 3y + 2)dy = 0$$

$$20. x^2 dx + ye^y dy = 0$$



الفصل السابع التحليل العددي Numerical Analysis

7-1 تمهيد

7-2 انواع الاخطاء Types of Errors

7-3 الاستكمال Interpolation

7-4 الصيغ المستخدمة في الاستكمال



التحليل العددي

7.1 تمهيد:

ان التحليل العددي يتضمن دراسة وتقييم طرق حساب نتائج عددية مطلوبة من بيانات عددية معطاة ويعتبر التحليل العددي جزءا من علم معالجة المعلومات، فنعتبر البيانات المعطاة تمثل المدخلات والنتائج المطلوبة هي المخرجات وطريقة الحساب تمثل بالنظام الحسابي. كما ان التحليل العددي يتعلق باشتقاق ووصف وتحليل طرق الحصول على حلول عددية لمسائل رياضية يصعب عادة حلها بالطرق التحليلية الجبرية الاعتيادية.

نادرا ما تكون البيانات المدخلة صحيحة لانها عادة تأتي من اجهزة قياس من نوع او اخر، لذلك فالمعلومات الخارجة تشمل على اخطاء ايضا كما ان هناك اخطاء اخرى تأتي من الطريقة الحسابية وفيما يأتي انواع هذه الاخطاء.

7.2 انواع الاخطاء Types of Errors:

لنفرض ان x يمثل العدد المضبوط وان \hat{x} يمثل القيمة التقريبية

للعدد x فإن الخطأ المطلق يعرف كما يأتي:

$$E = \mp(x - \hat{x})$$

كما ان الخطأ النسبي يعرف بالعلاقة

$$E_r = \left| \frac{E}{x} \right| = \left| 1 - \frac{\hat{x}}{x} \right|$$

وفيما يأتي انواع تلك الاخطاء.

1. اخطاء التقريب Round – off Errors.

عندما يقرب عدد معين لعدد من المراتب وخاصة في بعض العمليات الحسابية عندما لا تستوعب الة الحساب المستخدمة لمراتب ذلك الرقم فمثلا يقرب العدد 1234567 الى اربعة مراتب كما يلي 123500 وقد تكون هذه الاعداد كسورا وهذه الكسور قابلة الى القطع فمثلا النسبة $\frac{1}{3}$ تكتب في بعض الاحيان 0.333 او 0.33.

2. اخطاء الاقتران.

خطأ الاقتران ينشأ عن استبدال عملية منتهية بعملية لا نهائية مثلا ايجاد تكامل معادلة تفاضلية باستخدام معادلة فروق التي سيتم ذكرها لاحقا في هذا الفصل. وحساب تكامل محدود بتقريب مجموعة.

3. الأخطاء التي تنتج من الإنسان أو الآلة.

نتوقع في جميع العمليات العددية أن تحدث أخطاء إما من خلال نقل المعلومات أو الحصول على نتائج خاطئة من تنفيذ عمليات حسابية وحتى الجداول يمكن أن تحتوي على أخطاء إما عند استخدام الحاسبات الإلكترونية فقد يحدث خطأ يمكن التخلص منها أو تقليلها من خلال التدقيق خاصة إذا كان سبب الأخطاء هو الإنسان نفسه إما الأخطاء التي سببها الحاسبات فليس هناك سيطرة عليها.

مثال 1-7:

إذا ضربنا قيمة معينة في عدد ثم قسمنا على نفس العدد أي

$$(0.76 \times 0.06) \div 0.06 = 0.76$$

ولكن لو أجرينا التقريب في كل عملية فلا تنتج القيمة الأصلية

$$(0.76 \times 0.06) \div 0.06 = 0.05 \div 0.06 = 0.83 \neq 0.76$$

ويكون مقدار الخطأ الناتج من التقريب هو

$$E = 0.83 - 0.76 = 0.07$$

لو اردنا حساب $e^{1/3}$ لخمسة حدود فقط من مفكوك الدالة e^x وان الحسابات تجري لاربعة مراتب عشرية اوجد قيم الاخطاء.

$$f(x)=e^x, \quad x=\frac{1}{3}$$

فلو جعلنا $x=0.3333$ كتقريب للقيمة $\frac{1}{3}$ فهناك خطأ ابتدائي في

الدالة $f(x)$ أي ان

$$\begin{aligned} E_1 &= e^{0.3333} - e^{1/3} \\ &= e^{0.3333} - e^{0.3333333} \\ &= e^{0.3333} (1 - e^{0.0000333}) = -0.0000465196 \end{aligned}$$

وعند حساب e^x لخمسة حدود الاولى أي

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{(1/3)^2}{2!} + \frac{(1/3)^3}{3!} + \frac{(1/3)^4}{4!} \\ &= 1.396090535 \end{aligned}$$

وان

$$f(0.3333) = 1 + 0.3333 + \frac{(0.3333)^2}{2!} + \frac{(0.3333)^3}{6} + \frac{(0.3333)^4}{12}$$

$$= 1.396043828$$

$$E_2 = 1.396090535 - 1.396043828 = 0.000046707$$

= الخطأ الكلي

$$= E_1 + E_2 = -0.0000465196 + 0.000046707$$

$$= 0.000000188$$

7.3 الاستكمال Interpolation

يمثل تقريب دالة عامة بطائفة من دوال أبسط الذي يسهل إجراء بعض العمليات الحسابية التي نحتاجها كالتفاضل والتكامل، كما أن هذا التقريب له فوائد أخرى يمكن توضيحها في الأمثلة التالية:

مثال 7-3:

إذا كانت لدينا دالة $y=f(x)$ عند بعض النقاط أي أن

$$y_i = f(x_i); i=0,1,2,...,n$$

وطلب منا تعيين قيمة الدالة (قيمة y) عند نقطة x_0 مثلاً غير موجودة

ضمن القيم العلوية المعطاة:

مثال 4-7:

لو كان لدينا حاجة لايجاد قيمة $\sin(30.5)$ وان هذه القيمة غير موجودة في الجداول بيننا نجد ان $\sin(30)$ و $\sin(31)$ معلومة فيمكن تخمين تلك القيمة بمتوسط القيمتين 30 و 31 أي

$$\frac{\sin(30) + \sin(31)}{2} = 0.50751904$$

وهذه القيمة غير مطابقة للقيمة الحقيقية. ولكن لو استخدمنا قيم أكثر ووجدنا تقريب منها اقرب الى الحقيقة من متوسط القيمتين.

ان أكثر الدوال استخداما للتقريب هي متعددة الحدود (polynomials) والدوال المثلثية والدوال الاسية النسبية ولكن متعددة الحدود هي أكثرها استخداما.

مثال 5-7:

إذا كانت $y=f(x)$ معلوم قيمها عند النقاط المبينة في الجدول التالي

X	1	2	4	5
F(x)	0	2	12	21

احسب قيمة $f(3)$ باستخدام الاستكمال التربيعي للنقاط 1,2,4 والاستكمال التربيعي للنقاط (2,4,5) باستخدام الاستكمال التربيعي

لنقاط 1، 2، 4

نفرض ان

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$f(1) = 0 = a_0 + a_1 + a_2 \dots\dots\dots(1)$$

$$f(2) = 2 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 \dots\dots\dots(2)$$

$$f(4) = 12 = a_0 + 4a_1 + 16a_2 \dots\dots\dots(3)$$

وبحل هذه المعادلات انيا نحصل على

$$a_0 = 0, a_1 = -1, a_2 = 1$$

أي ان

$$f(x) = -x + x^2$$

$$\therefore f(3) = -3 + 9 = 6$$

وباستخدام الاستكمال التربيعي للنقاط 2، 4، 5

نفرض ان

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$f(2) = 2 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 \dots\dots\dots(1)$$

$$f(4) = 12 = a_0 + 4a_1 + 16a_2 \dots \dots \dots (2)$$

$$f(5) = 21 = a_0 + 5a_1 + 25a_2 \dots \dots \dots (3)$$

وبعد حل المعادلات انيا نحصل على

$$a_0 = \frac{8}{3}, a_1 = -3, a_2 = \frac{4}{3}$$

$$f(3) = \frac{8}{3} - 9 + \frac{4}{3}(9) = \frac{8}{3} + 3 = \frac{17}{3} = 5.667$$

وباستخدام التيجتين السابقتين يمكن ان نقدر

$$f(3) = \frac{6 + 5.667}{2} = 5.83$$

7.4 الصيغ المستخدمة في الاستكمال:

هناك العديد من الصيغ التي تستخدم متعدد الحدود منها:

7.4.1 صيغة لاكرانج Lagrange Formula

افرض ان $f_k = f(x_k) = p(x_k)$ لجميع قيم $(k=0,1,2,\dots,n)$ وان هناك

كثير حدود $L_k(x)$ من الدرجة n وان $x=x_j$ فان

$$L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

فان $L_k(x)$ يسمى معاملات لاكرانج والمعرفة كما ياتي:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

وان

$$P(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) f_k$$

مثال 6-7:

اذا كانت كثير الحدود للدالة $f(x)$ المعرفة في الجدول التالي:

X	1	3	4	6
F(x)	2	10	15	8

فيمكن الحصول على متعدد الحدود $f(x)$ كما يلي:

$$L_0(x) = \frac{(x-3)(x-4)(x-6)}{(1-3)(1-4)(1-6)} = -\frac{1}{30}(x-3)(x-4)(x-6)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(3-1)(3-4)(3-6)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-4)(x-6)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{(4-1)(4-3)(4-6)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-3)(x-6)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(6-1)(6-3)(6-4)} = \frac{1}{30}(x-1)(x-3)(x-4)$$

وان

$$P(x) = -\frac{1}{30}(x-3)(x-4)(x-6) \times 2 + \frac{1}{6}(x-1)(x-4)(x-6) \times 10$$

$$-\frac{1}{6}(x-1)(x-3)(x-6) \times 15 + \frac{1}{30}(x-1)(x-3)(x-4) \times 8$$

أي ان

$$P(x) = -0.60000x^3 + 5.4x^2 - 9.36667x + 6.6$$

مثال 7-7:

من الجدول التالي للدالة $f(x)$ قدر قيمة $f(0.6)$ باستخدام صيغة

لاكورانج الاستكمالية

X	0.4	0.5	0.7	0.8
F(x)	-0.916291	-0.693147	-0.356675	-0.233144

$$L_0(0.6) = \frac{(0.6-0.5)(0.6-0.7)(0.6-0.8)}{(0.4-0.5)(0.4-0.7)(0.4-0.8)} = -\frac{1}{6}$$

$$L_1(0.6) = \frac{(0.6-0.4)(0.6-0.8)}{(0.5-0.4)(0.5-0.8)} = -\frac{2}{3}$$

$$L_2(0.6) = \frac{2}{3} \quad L_3(0.6) = -\frac{1}{6}$$

$$f(0.6) = \left(-\frac{1}{6}\right)(-0.916291) + \frac{2}{3}(-0.693147) + \frac{2}{3}(-0.356675) - \frac{1}{6}(-0.233144) = -0.509975$$

7.4.2 جداول الفروق Differences table

تعتبر الفروق من العوامل المهمة في إيجاد الاستكمال والتقريب لقيم الدالة $f(x)$ وهي على نوعين هما:

1. الفروق الامامية Forward differences:

نفرض ان مجموعة النقاط مرتبة بحيث ان المسافة بين أي نقطتين متتاليتين ثابتة وتساوي h أي ان

$$x_1 = x_0 + h$$

$$x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$$

$$x_i = x_0 + ih \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

فيعرف معامل الفروق الامامية Δ بالعلاقة التالية:

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$$

أي ان

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

$$\Delta f_1 = f_2 - f_1$$

اما الفروق الامامية الثانية $\Delta^2 f$ تعرف بالعلاقة

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x))$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta[f(x+h) - f(x)]$$

$$= \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

$$= f(x+2h) - f(x+h) - [f(x+h) - f(x)]$$

$$\Delta^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

وبنفس الاسلوب يمكن ايجاد $\Delta^3 f(x)$ وبشكل عام فان

$$\Delta^{n+1} f(x) = \Delta(\Delta^n f(x))$$

فاذا استخدمنا $y_i = f_i = f(x_i)$ فان

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i)$$

وبشكل عام فان

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

وعند وضع تلك الفروق في جدول يسمى بجدول الفروق

(difference table) لقيم y المعطاة:

$\underline{x_i}$	$\underline{y_i}$	$\underline{\Delta}$	$\underline{\Delta^2}$	$\underline{\Delta^3}$	$\underline{\Delta^4}$	$\underline{\Delta^5}$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$			
x_4	y_4	Δy_4				
x_5	y_5					

مثال 7-8

اكتب جدول الفروق الامامية للقيم التالية:

X	2	3	4	5	6
F	5	10	17	26	37

$\underline{x_i}$	$\underline{y_i}$	$\underline{\Delta}$	$\underline{\Delta^2}$	$\underline{\Delta^3}$
2	5			
3	10	5		
4	17	7	2	
5	26	9	2	0
6	37	11	2	0

2. الفروق الخلفية Backward differences

إذا كانت (x_i, f_i) تمثل النقاط المعروفة، فإن الفروق الخلفية الأولى ∇ والثانية ∇^2 ومن المرتبة k هي ∇^k تعرف كالآتي:

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

$$\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1}) = \nabla f_i - \nabla f_{i-1}$$

وان

$$\nabla^k f_i = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}$$

وإذا استخدمنا $f_i = y_i$ فإن

$$\nabla^k y_i = \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i-1}$$

وعند وضع تلك الفروق في جدول يسمى جدول الفروق الخلفية لقيم y المعطاة وكما يأتي:

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
x_0	y_0	Δy_1				
x_1	y_1	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_3$		
x_2	y_2	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_4$	$\Delta^4 y_4$	$\Delta^5 y_5$
x_3	y_3	Δy_4	$\Delta^2 y_4$	$\Delta^3 y_5$	$\Delta^4 y_5$	
x_4	y_4	Δy_5	$\Delta^2 y_5$			
x_5	y_5					

اوجد الفروق الخلفية $\nabla^3 y_3, \nabla^2 y_2, \nabla y_1$ من جدول القيم التالية:

X	2	3	4	5	6
F	5	10	17	26	37

$$\nabla y_4 = y_4 - y_3 = 37 - 26 = 11$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 y_2 &= \nabla y_2 - \nabla y_1 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = (17 - 10) - (10 - 5) \\ &= 7 - 5 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^3 y_4 &= \nabla^2 y_4 - \nabla^2 y_3 \\ &= (\nabla y_4 - \nabla y_3) - (\nabla y_3 - \nabla y_2) \\ &= \nabla y_4 - 2\nabla y_3 + \nabla y_2 \\ &= 11 - 2(26 - 17) + (17 - 10) = 11 - 18 + 7 = 0 \end{aligned}$$

7.4.3 صيغة نيوتن - كريكوري

إذا كانت قيم x متساوية المسافات، ولايجاد تقدير الدالة $f(x)$ عند قيمة غير معلومة فنجد متعدد الحدود $p(x)$ للقيم المعلومة باستخدام صيغة نيوتن وهي على نوعين هما:

1. صيغة نيوتن للفروق الامامية **Newton's Forward Formula**:

تستخدم هذه الصيغة لايجاد متعدد حدود $p(x)$ كتقريب للدالة $f(x)$ عندما تكون قيم x_0, x_1, \dots, x_n متباعدة بمسافة ثابتة h أي ان $x_i - x_{i-1} = h$

فلا مكان كتابة صيغة نيوتن للفروق الامامية كما ياتي:

$$p(x) = y_0 + (x - x_0) \frac{\Delta y_0}{1!h} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} + \dots + \dots +$$

$$(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

مثال 10-7:

اوجد القيمة التقريبية للدالة $f(x)$ عندما $x=2.5, x=3.4$ للقيم

المعلومة في الجدول التالي:

X	2	3	4	5	6
F	5	10	17	26	37

ان جدول الفروق الامامية هو:

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
2	5				
3	10	5			
4	17	7	2		
5	26	9	2	0	
6	37	11	2	0	0

وبتطبيق صيغة نيوتن نحصل على متعددة الحدود التالية:

$$p(x) = 5 + (x-2)\frac{5}{1!1} + (x-2)(x-3)\frac{2}{2!1^2} + (x-2)(x-3)(x-4)\frac{0}{3!1^3} + 0$$

$$= x^2 + 1$$

أي ان

$$p(2.5) = (2.5)^2 + 1 = 7.25$$

$$p(3.4) = (3.4)^2 + 1 = 12.56$$

مثال 11-7:

اوجد متعددة الحدود من الدرجة الثالثة لجدول الفروق الامامية التالي:

$\underline{x_k}$	$\underline{y_k}$	$\underline{\Delta y_k}$	$\underline{\Delta^2 y_k}$	$\underline{\Delta^3 y_k}$
4	1			
6	3	2		
8	8	5	3	
10	20	12	7	4

وبتطبيق صيغة نيوتن نحصل على

$$p(x) = 1 + \frac{2}{2}(x-4) + \frac{3}{8}(x-4)(x-6) + \frac{4}{48}(x-4)(x-6)(x-8)$$

$$p(x) = \frac{1}{24}(2x^3 - 27x^2 + 142x - 240)$$

2. صيغة نيوتن للفروق الخلفية Newton's Backward Formula:

لايجاد القيمة التقريبية لـ $f(x)$ عندما تكون x قرب نهاية الجدول او (x_{n-1}, x_n) فاننا نستخدم صيغة نيوتن الخلفية حيث ان القيمة التقريبية تكون اقرب الى القيمة الحقيقية من صيغة نيوتن الامامية. وان هذه الصيغة مشابهة للصيغة السابقة (صيغة نيوتن الامامية) بالتعويض عن Δ بـ ∇ وان هذه الصيغة يمكن كتابتها كما يلي:

$$Q(x) = y_n + (x - x_n) \frac{\nabla y_n}{1!h} + (x - x_n)(x - x_{n-1}) \frac{\nabla^2 y_n}{2!h^2} + \dots$$

$$+ (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1) \frac{\nabla^n y_n}{n!h^n}$$

مثال 12-7:

اوجد القيمة التقريبية لـ $\cos(0.25)$ عندما تكون قيم $\cos(x)$ المعلومة هي الموضحة في الجدول التالي:

X	0	0.1	0.2	0.3
Cos(x)	1	0.995	0.98007	0.95534

يتضح ان القيمة 0.25 تقع بين (0.2, 0.3) أي قرب نهاية الجدول لذلك نستخدم صيغة نيوتن الخلفية، اذ ان $h=0.1$ ويجب اولا تكوين جدول الفروق الخلفية:

<u>x</u>	<u>cos(x)</u>	<u>∇</u>	<u>∇²</u>	<u>∇³</u>
0	1			
0.1	0.995	-0.005		
0.2	0.98007	-0.01493	-0.00993	0.00013
0.3	0.95534	0.02473	-0.0098	

وبتعويض هذه الفروق في الصيغة

$$Q(x) = y_3 + (x - x_3) \frac{\nabla y_3}{h} + (x - x_3)(x - x_2) \frac{\nabla^2 y_3}{2!h^2}$$

$$+ (x - x_3)(x - x_2)(x - x_1) \frac{\nabla^3 y_3}{3!h^3}$$

$$Q(x) = 0.95534 + (x - 0.3) \frac{-0.02473}{0.1} + (x - 0.3)(x - 0.2) \frac{-0.0098}{2!(0.1)^2} + (x - 0.3)(x - 0.2)(x - 0.1) \frac{0.00013}{3!(0.1)^3}$$

$$Q(x) = x^3 - 0.503x^2 + 0.00008x + 1$$

وبالتعويض عن $x = 0.25$ نحصل على

$$Q(0.25) = 0.96891$$

أي أن

$$\cos(0.25) \approx 0.96891$$

علما بأن القيمة المضبوطة هي 0.96891

الجدول التالي يعطي بعض النقاط على منحنى الدالة $y = f(x)$

X	4	6	8	10
y	1	3	8	20

اوجد $f(9)$ باستخدام صيغة نيوتن الخلفية

نجد جدول الفروق الخلفية

<u>x</u>	<u>y</u>	<u>∇</u>	<u>∇^2</u>	<u>∇^3</u>
4	1			
		2		
6	3		3	
		5		4
8	8		7	
		12		
10	20			

$h=2$ وبتطبيق صيغة نيوتن الخلفية

$$Q(x) = y_3 + (x - x_3) \frac{\nabla y_3}{h} + (x - x_3)(x - x_2) \frac{\nabla^2 y_3}{2!h^2} + (x - x_3)(x - x_2)(x - x_1) \frac{\nabla^3 y_3}{3!h^3}$$

$$= 20 + (x - 10) \frac{12}{2} + (x - 10)(x - 8) \frac{7}{2 \cdot 2^2} + (x - 10)(x - 8)(x - 6) \frac{4}{3!2^3}$$

$$Q(x) = 20 + \frac{12}{2}(x - 10) + \frac{7}{8}(x - 10)(x - 8) + \frac{4}{48}(x - 10)(x - 8)(x - 6)$$

أي ان

$$f(9) = Q(9) = \frac{103}{8} = 12.875$$

تمارين الفصل السابع

1. اوجد مقدار الخطأ لحساب قيمة $f(\sqrt{2}-1)^6$ بالتعويض عن

$$\sqrt{2} = 1.4$$

2. اذا كانت لديك الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 0.149$ احسب

قيمة $f(x)$ عندما $x=4.71$ لثلاث مراتب عشرية واحسب قيمة الخطأ.

3. اوجد ناتج الحسابات التالية:

أ. بالضبط.

ب. بالتقريب لثلاثة ارقام ثم حدد الخطأ

a) $14.1 + 0.0981$

b) $(164+0.913) - (143 - 21)$

c) 0.0218×179

d) $(164 - 143) + (0.913 - 21)$

4. احسب تقريب لقيمة $f(1.25)$ اذا علمت ان

$$f(0) = 1, f(1) = 6, f(3) = 34, f(7) = 162$$

5. اوجد متعددة الحدود من الدرجة الثالثة التي تاخذ القيم ادناه:

X	0	1	2	4
y	1	1	2	5

6. استخدم صيغة لاكرانج لايجاد كثيرة حدود تكعيبة للجدول التالي ثم

احسب قيمة كثيرة الحدود عند $x = 2,5$.

X	0	1	4	6
y	1	-1	1	-1

7. اثبت ان $y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$ اذا كان

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0$$

8. استخدم صيغة نيوتن الامامية لايجاد متعدد حدود من الدرجة الثالثة

اذا توفرت لديك القيم التالية:

X	3	4	5	6
y	6	24	60	120

9. اوجد متعدد حدود من الدرجة الثالثة باستخدام صيغة نيوتن الخلفية

ل للجدول التالي:

X	4	6	8	10
y	1	3	8	20

10. استخدم صيغة نيوتن الخلفية لإيجاد متعددة حدود من الدرجة الرابعة للقيم

X	1	2	3	4	5
y	1	-1	1	-1	1

ثم اوجد تقريب القيمة (3.5)

11. استخدم صيغة نيوتن الامامية لإيجاد متعدد حدود من الدرجة الثالثة للتمرين (10) واوجد تقريب القيمة (3.5) وقارن بين نتيجة التقريب بين صيغتي نيوتن.

12. اثبت ان

$$y_n = \sum_{i=0}^n C_i^n \Delta^i y_0$$



الفصل الثامن

حل المعادلات الخطية واللاخطية

8-1 حل المعادلات اللاخطية Non- linear Equations

8-2 حل المعادلات الخطية Linear Equations

حل المعادلات الخطية واللاخطية

8.1 حل المعادلات اللاخطية Non-linear Equations:

المعادلات اللاخطية هي المعادلات التي يكون فيها على الأقل حد واحد من الدرجة الثانية أو أكثر أو دوال أسية أو مثلثية أو لوغاريتمية. مثل

$$x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$x - \sin x = 0$$

$$e^x - x = 0$$

والطرق المعروفة التي تستخدم صيغاً مباشرة تؤدي إلى حل المعادلة حلاً مضبوطاً هي طرق لا تطبق إلا على عدد محدود جداً من المعادلات. وسنتناول بعض الطرق العددية التي تسمى بالطرق التكرارية والتي تؤدي عادة إلى إيجاد جذور (يسمى a جذر المعادلة $f(x)=0$ إذا كان $f(a)=0$) قريبة جداً من الجذور المضبوطة وفي أحيان تؤدي إلى هذه الجذور المضبوطة. حيث تفترض قيمة تقريبية ابتدائية x_0 ثم يكرر استخدام الصيغة عدة مرات للحصول على قيم أقرب إلى الجذر المضبوط.

حل المعادلات
الخطية واللاخطية

8.1.1 طرائق الحل

هناك عدد كبير من طرائق إيجاد جذور المعادلات اللاخطية وسنذكر هنا أكثر الطرق استخداما.

1. مبرهنة القيمة الوسطى Mean Value theorem.

لو كانت لدينا الدالة $y=f(x)$ قابلة للاشتقاق، كما ان هناك نقطتان (a,b) لهذه الدالة فان

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \dots\dots\dots (8-1)$$

واذا كانت لدينا قيمة وسطى بين a, b ولتكن θ فان

$$f'(\theta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

من المعلوم ان اغلب طرائق حل المعادلات اللاخطية نحصل منها على صيغة تكرارية هي

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{k} \quad n = 0, 1, 2, \dots\dots\dots$$

وان احدى الطرق التي تستخدم k العلاقة (8-1) لنظرية القيمة والتي تسمى بطريقة القاطع المتغير (Variable Secant) اذ تصبح قيمة

الجذر الذي سيكرر للحصول على قيمة قريبة من الجذر الحقيقي هو:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

وبذلك تصبح الصيغة كما يأتي:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

مثال 1-8:

جد الجذر الواقع في المجال (0.5,1) للمعادلة اللاخطية

$$x + e^{-2x} - 1 = 0$$

بافتراض ان $x_0 = 0.5$ وان $x_1 = 0.9$ ويمكن اخذ أي نقطتين ضمن

المجال اعلاه

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$= 0.9 - f(0.9) \frac{(0.9) - (0.5)}{f(0.9) - f(0.5)}$$

اذ ان

$$f(0.9) = 0.9 + e^{-1.8} - 1 = 0.065298888$$

$$f(0.5) = 0.5 + e^{-1} - 1 = -0.132120558$$

$$x_2 = 0.9 - 0.065298888 \cdot \frac{0.4}{0.197419446} = 0.7677$$

وبما انه

$$f(0.7677) = -0.016933$$

أي ان القيمة لا تساوي صفر وعليه يجب إيجاد قيمة جديدة هي x_3
وتستخدم هنا $x_2 = 0.7677$ و $x_1 = 0.9$ وعند التعويض نجد ان
 $x_3 = 0.79494$ واذ ان $f(0.7677) \neq 0$ ونستمر بتوليد قيم جديدة
والجدول الاتي يوضح هذه العمليات:

X_{n-1}	X_n	X_{n+1}	$F(m)$
0.5	0.9	0.7677	-0.016933
0.9	0.76770	0.79494	-0.001103
0.7677	0.79494	0.79685	0.0000231
0.79494	0.79685	0.79681	0.00000003

أي ان الجذر هي 0.79681 ولكن لو اخذنا $x_0 = 0.6$ $x_1 = 0.8$ فسنجد
الجذر بأسلوب أسرع من القيمتين التي اخترناها.

2. طريقة التكرار Iterative Method :

تستخدم هذه الطريقة لحل المعادلات $f(x)=0$ وذلك بوضع المعادلة في صورة خاصة هي:

$$x = g(x)$$

وان المعادلة $f(x)=0$ يمكن وضعها بالصورة الخاصة بعدد كبير من الطرق فمثلا المعادلة $x^3-2=0$ يمكن وضعها بالطرق التالية:

$$x = x^3 - 2 + x \dots \dots \dots (1)$$

$$x = \frac{2 - x^3 + 5x}{5}$$

$$x = \frac{2}{x^2}$$

ثم نبدأ بقيمة مناسبة $x=x_0$ وكون سلسلة من تقريبات باستخدام العلاقة

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ومن الواضح انه اذا كان لهذه المتتالية x_0, x_1, x_2, \dots غاية (limit)

هو m فان m يكون جذر لمعادلة $x = g(x)$ لان $m = g(m)$

مثال 3-8:

اوجد الجذر الحقيقي للمعادلة $x^3 - 2 = 0$ بطريقة التكرار.

$$x = x^3 - 2 + x \dots\dots\dots (1)$$

$$x = \frac{2 - x^3 + 5x}{5} \dots\dots\dots (2)$$

وباختيار القيمة الابتدائية $x_0 = 1.2$

$$x_{n+1} = x_n^3 - 2 + x_n$$

$$x_0 = 1.2$$

$$x_1 = (1.2)^3 - 2 + 1.2 = 0.928 \dots\dots\dots (1) \text{ باستخدام}$$

$$x_2 = (0.928)^3 - 2 + 0.928 = -0.273$$

$$x_3 = -2.293$$

$$x_4 = -16.349$$

$$x_{n+1} = \frac{2 - x_n^3 + 5x_n}{5}$$

$$x_0 = 1.2$$

$$x_1 = \frac{2 - (1.2)^3 + 5(1.2)}{5} = 1.2544 \dots\dots\dots (2) \text{ باستخدام}$$

$$x_2 = 1.2596$$

$$x_3 = 1.2599$$

$$x_4 = 1.25992$$

ونجد ان القيم المثالية تتقارب فعلاً نحو الجذر الصحيح للصيغة (2)

$$m = \sqrt[3]{2}$$

3. طريقة نيوتن - رافسون Newton - Raphson Method:

لحل المعادلة بهذه الطريقة نضع المعادلة أولاً بالصورة $f(x)=0$
ونوجد قيمة تقريبية ابتدائية x_0 بالقرب من الجذر الصحيح واقعاً بين
القيمتين $x=a$ ، $x=b$ ثم نوجد تقريبات متتالية $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$
وحسب العلاقات التالية:

$$\Delta = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \Delta = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

وبشكل عام فان:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

مثال 4-8:

اوجد لاربعة ارقام جذراً للمعادلة $x^4 - x = 10$ بالقرب من $x=2$

بطريقة نيوتن - رافسون.

$$f(x) = x^4 - x - 10 = 0$$

$$f(0) = -10 < 0$$

$$f(1) = -10 < 0$$

$$f(2) = 4 > 0$$

أي ان المعادلة لها جذرين $x=2$ و $x=1$ وتوقع ان يكون اقرب الى $x=2$ والتي تمثل القيمة الابتدائية x_0

$$f(x) = x^4 - x - 10$$

$$f'(x) = 4x^3 - 1$$

$$\therefore x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - x_n - 10}{4x_n^3 - 1} = \frac{3x_n^4 + 10}{4x_n^3 - 1}$$

وبتطبيق الصيغة مرات عديدة نحصل على:

$$x_1 = 1.871$$

$$x_2 = 1.85578$$

$$x_3 = 1.855585$$

$$x_4 = 1.85558452522$$

وان القيمة المطلقة للفارق بين القيمتين المتتاليتين $|x_n - x_{n-1}|$

اصبح صفراً أي

$$|x_4 - x_3| = 0.00000047478$$

اوجد بطريقة نيوتن - رافسن اصغر جذر للمعادلة $e^{-x} = \sin x$ ولثلاثة ارقام عشرية.

الحل:

برسم تقريبي للمنحنين $y = \sin x$ و $y = e^{-x}$ نجد ان القيمة التقريبية للاحداثين السيني لنقطة التقاطع التي تقابل اصغر جذر للمعادلة المعطاة هي $(x_0 = 0.6)$

$$f(x) = e^{-x} - \sin x$$

$$f'(x) = e^{-x} - \cos x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{-x_n} - \sin x_n}{-e^{-x_n} - \cos x_n}$$

$$x_0 = 0.6$$

$$x_1 = 0.5885$$

$$x_2 = 0.58853274$$

ونتوقف عن تطبيق الصيغة التكرارية لان:

$$\Delta = |x_2 - x_1| = |0.58853274 - 0.5885| = 0.00000327$$

وهي كمية صغيرة جداً تقترب من الصفر

4. طريقة التنصيف Bisection Method:

لنفرض لدينا الدالة المستمرة $f(x)$ معرفة في الفترة $[a, b]$ ونفرض ان
 $f(a) = f(b)$ لهما اشارتان مختلفتان فتوجد قيمة p اذ ان $a < p < b$
بحيث ان $f(p) = 0$ والمطلوب ايجاد الجذر p .

في البداية نضع $b_1 = b$ و $a_1 = a$ ونفرض ان p_1 هي النقطة
المتوسطة في الفترة $[a, b]$ أي ان

$$p_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

فاذا كانت $f(p) = 0$ فان $p = p_1$ والا فان إشارة $f(p_1)$ هي نفس
إشارة $f(a_1)$ او $f(b_1)$. فاذا كان $f(a_1)$, $f(p_1)$ لهما نفس الإشارة فان
قيمة p تقع بين القيمتين $[p_1, b_1]$ فنضع $b_2 = b_1$ و $a_2 = p_1$. اما اذا كانت
إشارة $f(p_1)$ هي نفس إشارة $f(b_1)$ فان p تنتمي الى القيمتين $[a_1, p_1]$
وحيث نضع $b_2 = p_1$, $a_2 = a_1$ ونعيد تطبيق العملية على الفترة $[a_2, b_2]$
ونتوقف احد الشروط التالية:

$$|p_n - p_{n-1}| < \epsilon \quad (1)$$

$$\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \epsilon \quad p_n \neq 0 \quad (2)$$

$$|f(p_n)| < \epsilon \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{b_n - a_n}{|a_n|} < \epsilon \quad a_n \neq 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{b-a}{2} < \epsilon, \epsilon > 0 \quad \text{اذان}$$

مثال 6-8:

أوجد جذر المعادلة $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ للفترة $[1, 2]$ بحيث
توقف التكرار عندما يتحقق الشرط

$$\frac{b_n - a_n}{|a_n|} < 5 \times 10^{-4}$$

$$f(1) = -5 \quad ; \quad f(2) = 14$$

وبتطبيق خطوات الطريقة نحصل على قيم الجدول التالي:

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	1	2	1.5	2.375
2	1	1.5	1.25	-1.79687
3	1.25	1.5	1.375	0.16211
4	1.25	1.375	1.3125	-0.84839
5	1.3125	1.375	1.34375	-0.35098
6	1.34375	1.375	1.359375	-0.09641
7	1.359375	1.375	1.3671875	0.03236
8	1.359375	1.3671875	1.36328125	-0.03215
9	1.36328125	1.367185	1.365234375	0.000072
10	1.36328125	1.365234375	1.364257813	-0.01605
11	1.364257813	1.365234375	1.364746094	-0.00799
12	1.364746094	1.365234375	1.364990235	-0.00396

ونلاحظ انه بعد (12) تكرار فان

$$p_{12} = 1.364990235$$

أي ان الخطأ هو:

$$\Delta = |p - p_{12}| \leq |b_{12} - a_{12}| = 0.000488281$$

وبما ان

$$\frac{|b_{12} - a_{12}|}{|a_{12}|} = 3.6 \times 10^{-4} < 5 \times 10^{-4}$$

8.2 حل المعادلات الخطية Linear Equations:

اذا كان لدينا النظام الخطي التالي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n$$

الذي يضم m من المعادلات في n من المجاهيل، ويمكن كتابة هذا

النظام بصيغة المصفوفات كما يأتي:

$$AX = b \dots$$

8.2

اذ ان

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

هناك نوعين من الحلول للنظام 2-8 هي:

8.2.1 الطرائق المباشرة للحل Direct Method of solution

8-2-1-1 طريقة كاوس للخلف Gauss Elimination:

وهي أبسط أنواع الطرق التي يمكن الحصول منها على حل لمنظومة المعاملات الخطية فاذا كتبنا النظام بالصورة التالية التي تسمى بالمصفوفة المزيّدة Augmented Matrix.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & : & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & : & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & : & b_n \end{pmatrix}$$

ونجعل العناصر $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{m1}$ مساوية للصفر وذلك بضرب عناصر

الصف الاول في العنصر $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ وطرحها من عناصر الصف الثاني.

حل المعادلات
الخطية واللاخطية

وضرب عناصر الصف الاول في العنصر $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ وطرحه من الصف الثالث وهكذا لجميع الصفوف لنحصل على النظام.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & : & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & : & b'_2 \\ : & : & & & & : & : \\ 0 & a'_{m2} & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & : & b'_m \end{pmatrix}$$

وبنفس الاسلوب نحصل العناصر $a'_{m3} \dots a'_{32}$ اصفار بضرب عناصر الصف الثاني بالعنصر $\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$ وطرح الناتج من الصف الثاني وهكذا لجميع الصفوف لنحصل على المصفوفة.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & : & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & : & d_2 \\ : & : & c_{33} & & : & : & : \\ : & : & : & & : & : & : \\ 0 & 0 & 0 & & c_{mn} & : & d_n \end{pmatrix}$$

وبذلك يصبح $c_n = \frac{d_n}{c_{mn}}$ وبالتعويض في باقي المعادلات نحصل على باقي المجاهيل والامثلة التالية توضح الطريقة:

اوجد حل منظومة المعادلات التالية بطريقة كاوس:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 = 9$$

$$4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3$$

ان المصفوفة المحدودة النظام المعادلات هي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 0 \\ 3 & -1 & -2 & : & 9 \\ 4 & 3 & -3 & : & 3 \end{pmatrix}$$

بضرب عناصر الصف الاول في 3 وطرحها من عناصر الصف

الثاني، كما نضرب عناصر الصف الاول في 4 وطرحها من عناصر الصف

الثالث ينتج:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 9 \\ 0 & -5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

وبضرب عناصر الصف الثاني بـ $-\frac{5}{-7}$ أي $\frac{5}{7}$ وتطرح من عناصر الصف الثالث ينتج:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & -\frac{24}{7} & -\frac{24}{7} \end{array} \right)$$

اذ ان

$$-\frac{24}{7}X_3 = -\frac{24}{7}$$

$$X_3 = 1$$

وان

$$-7x_2 - 5x_3 = 9$$

$$-7x_2 - 5 = 9$$

$$-7x_2 = 14 \Rightarrow x_2 = -2$$

وان

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 - 4 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$$

أي ان مجموعة الحل هو (3، -1، 2).

اوجد حل منظومة المعادلات الخطية التالية بطريقة كاوس

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$

$$5x_1 - 3x_2 - x_3 = 5$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 9$$

ان المصفوفة المحدودة لنظام المعادلات هي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 5 & 3 & 1 & : & 5 \\ 2 & -1 & 2 & : & 9 \end{pmatrix}$$

نضرب عناصر الصف الاول في 5 ونطرحها من عناصر الصف

الثاني كما نضرب عناصر الصف الاول في 2 ونطرحها من عناصر الصف

الاول ينتج:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 0 & -7 & -4 & : & -5 \\ 0 & -5 & 0 & : & 5 \end{pmatrix}$$

نضرب عناصر الصف الثاني في $\frac{-5}{-7}$ او $\frac{5}{7}$ ونطرح من عناصر الصف الثالث ينتج:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 0 & -7 & -4 & : & -5 \\ 0 & 0 & \frac{20}{7} & : & \frac{60}{7} \end{pmatrix}$$

أي ان

$$\frac{20}{7}x_3 = \frac{60}{7} \Rightarrow x_3 = 3$$

وان

$$-7x_2 - 4x_3 = -5$$

$$-7x_2 - 12 = -5 \Rightarrow -7x_2 = 7 \Rightarrow x_2 = -1$$

وان

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 - 2 + 3 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$$

أي ان مجموعة الحل هي (3، -1، 1)

ملاحظة: ان طريقة كاوس لا يمكن استخدامها عندما يكون $a_{11}=0$ ويتم استخدام طريقة كاوس مع التحوير الجزئي partial pivoting وهي خارج نطاق هذا الكتاب.

8-2-1-2 طريقة كراوت وجولسكي Grout-Cholesky:

ان هذه الطريقة تعتمد على تحليل المصفوفة A الى حاصل ضرب عاملين مثلثين أي:

$$A = L \cdot U$$

اذ ان $L=(l_{ij})$ هي مصفوفة مثلثية سفلى Lower triangular Matrix.

$U=(u_{ij})$ مصفوفة مثلثية عليا Upper triangular Matrix.

حيث تشترط طريقة كراوت ان تكون العناصر القطرية للمصفوفة U هي الواحد

$$u_{ii} = 1 \quad i= 1,2,\dots,n$$

في حين تشترط طريقة جولسكي ان تكون عناصر قطري المصفوفتين L , U متساوية.

$$L_{ii} = U_{ii} \quad i= 1,2,\dots,n$$

وفيا يلي اسلوب كلا الطريقتين

يقال للمصفوفة A بأنها موجبة قطعاً (Positive Definite Matrix) إذا كانت مصفوفة متماثلة، وأن قيمة $X^T A Y$ موجبة لأي متجه غير صفري Y .

1. إيجاد المصفوفات المثلثية.

فعند تطبيق طريقة جولسكي على مصفوفة موجبة قطعاً ينتج أن العناصر القطرية في L و U جميعها موجبة وأن:

$$A = LU = LL^T$$

ويمكن حساب عناصر المصفوفة المثلثية السفلية L عمود بعد آخر حسب الترتيب بالصيغ التالية:
للعناصر غير القطرية

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{ij}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{kj} \right)$$

مثال 8-9:

حلل المصفوفة A التالية بطريقة جولسكي

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$A = \begin{pmatrix} 1_{11} & 0 & 0 \\ 1_{21} & 1_{22} & 0 \\ 1_{31} & 1_{32} & 1_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{11} & 1_{21} & 1_{31} \\ 0 & 1_{22} & 1_{32} \\ 0 & 0 & 1_{33} \end{pmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = -\frac{1}{2} = -0.5$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{4.25 - (-0.5)^2} = 2$$

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}}(a_{32} - l_{31}l_{21}) = \frac{1}{2}(2.75 - 0.5(-0.5)) = 1.5$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{3.5 - (0.5)^2 - (1.5)^2} = 1$$

وعليه فان:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 2 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ب. حل النموذج الخطي.

إذا كان المطلوب حل النظام الخطي $Ax=b$ إذا كان A مصفوفة موجبة قطعاً، فبعد إيجاد الصورة.

$$A = LL^T$$

نحلل النظام الخطي الى

$$LL^T x = b$$

وهذا يعني ان

$$Lz = b$$

$$L^T x = z$$

ولحل النظام المثلثي السابق بالتعويض الامامي مرة وبالتعويض الخلفي مرة اخرى أي:

لحل $Lz = b$ فان

$$z_1 = b_1 / l_{11}$$

$$z_i = \frac{1}{l_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} z_j \right], \quad i = 2, 3, \dots, n$$

ولحل النظام $L^T x = z$ فان

$$x_n = z_n / l_{nn}$$

$$x_i = \frac{1}{l_{ii}} \left[z_i - \sum_{j=i+1}^n l_{ji} x_j \right] \quad i = n-1, \dots, 1$$

باعتبار ان $U = L^T$ اذ ان $u_{ij} = l_{ji}$

مثال 8-10:

اوجد حل النموذج الخطي التالي بطريقة جولسكي

$$4x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 8$$

$$x_1 + \frac{5}{4}x_2 + \frac{5}{8}x_3 = 6$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{8}x_2 + \frac{9}{16}x_3 = 4$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1/2 \\ 1 & 5/4 & 5/8 \\ 1/2 & 5/8 & 9/16 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}} = 1$$

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}} (a_{32} - l_{31} \cdot l_{21})$$

$$l_{32} = 1 \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{4}}$$

$$l_{33} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{1}{2}$$

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad U = L' = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ولايجاد قيم X نستخدم العلاقتين التاليتين:

$$Lz = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = \frac{8}{2} = 4$$

$$z_2 = 1 \left(6 - \frac{1}{2} \cdot 4 \right) = 4$$

$$z_3 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \left(4 - \sum_{j=1}^2 l_{3j} z_j \right) = 2 \left(4 - \frac{1}{4} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \right) = 2(4 - 1 - 2) = 2$$

اما قيم X فيمكن ايجادها حسب العلاقة التالية:

$$L^T x = z = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$x_2 = \frac{1}{1} \left(4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \right) = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(4 - \sum_{j=2}^3 l_{ji} x_j \right) = \frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot 4 \right) = \frac{1}{2} (4 - 1 - 1) = 1$$

وتتلخص خطوات الحل بطريقة كروات كما يأتي:

أ. إيجاد المصفوفات المثلثية:

نفرض ان المصفوفة A يمكن تحليلها بالصورة $A = L.U$ اذ ان:

$$L = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ l_2 & d_2 & & \\ & l_3 & \ddots & \\ 0 & & l_n & d_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u_1 & & 0 \\ & 1 & u_2 & \\ & & 1 & \ddots \\ 0 & & & \ddots & u_{n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ B_2 & \alpha_2 & s_2 & & \\ & B_3 & & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & s_{n-1} \\ 0 & & & B_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

اذ ان

$$\alpha_1 = d_1, B_i = l_i; \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\alpha_i = l_i u_{i-1} + d_i; \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$S_i = d_i u_i; \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

ب. حل النظام الخطي ثلاثي القطر:

نفرض ان A مصفوفة ثلاثية القطر (هي مصفوفة مربعة متماثلة فيها عناصر القطر الرئيسي وعناصر قطران اخران اعداد حقيقية وباقي الاقطار اصفار) ويمكن تحليلها الى عاملها المصفوفات المثلثية L, U اذ ان:

$$Ax = b$$

$$LUx = b$$

نفرض ان

$$Ux = z \dots\dots\dots (1)$$

$$Lz = b \dots\dots\dots (2)$$

فنحل اولاً النظام (2) ثم النظام (1) فلحل النظام (2) فان:

$$z_1 = \frac{b_1}{d_1}, \quad z_i = \frac{1}{d_i} (b_i - l_i z_{i-1}); \quad i = 2, 3, \dots, n$$

ولحل النظام (1) فان

$$X_n = Z_n$$

$$X_i = Z_i - u_i x_i + 1; \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

مثال 11-8:

افرض ان

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

اوجد حل هذه المصفوفة باستخدام طريقة كراوت

$$d_1 = \alpha_1 = 2$$

$$u_1 = s_1 / d_1 = -1/2$$

$$l_2 = B_2 = -1$$

$$d_2 = \alpha_2 - l_2 u_1 = 2 - (-1) \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$u_2 = s_2 / d_2 = -1 / (3/2) = -2/3$$

$$l_3 = B_3 = -1$$

$$d_3 = \alpha_3 - \frac{1}{3}u_2 = 2 - (-1)(-2/3) = \frac{4}{3}$$

$$u_3 = s_3 / d_3 = -1 / \left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$l_4 = B_4 = -1$$

$$d_4 = \alpha_4 - l_4 u_3 = 2 - (-1)\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وان حل النموذج الخطي هو

$$z_1 = b_1 / d_1 = \frac{1}{2}$$

$$z_2 = \frac{1}{d_2}(b_2 - l_2 z_1) = \frac{1}{3/2} \left[0 - (-1) \left(\frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{3}$$

$$z_3 = \frac{1}{d_3}(b_3 - l_3 z_2) = \frac{1}{4/3} \left[0 - (-1) \left(\frac{1}{3} \right) \right] = \frac{1}{4}$$

$$z_4 = \frac{1}{d_4}(b_4 - l_4 z_3) = \frac{1}{5/4} \left[1 - (-1) \left(\frac{1}{4} \right) \right] = 1$$

$$x_4 = z_4 = 1$$

$$x_3 = z_3 - u_3 x_4 = \frac{1}{4} - (-3/4) = 1$$

$$x_2 = z_2 - u_2 x_3 = \frac{1}{3} - (-2/3) = 1$$

$$x_1 = z_1 - u_1 x_2 = \frac{1}{2} - (-1/2) = 1$$

أي ان الحل للنظام هو:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$$

8.2.2 الطرائق التكرارية:

في الطرائق المباشرة نجري عدد محدد من العمليات الجبرية للوصول الى الحل المطلوب اما في الطرائق التكرارية فاننا نبدأ بتقريب اولي ثم نحاول تحسينه بعدد من المرات الى ان نصل الى حل دقيق. وتستخدم هذه الطرائق عند حل النظم الخطية الكبيرة أي التي تحوي عدد كبير من المعادلات او المجاهيل ومن هذه الطرق.

8-2-2-1 طريقة جاكوبي (التقريبات المتتالية) Jacobi's Method:

تبدأ خطوات هذه الطريقة باعطاء تقديرات (تخمينات) أولية للمجاهيل (x_i) ومثلاً $x_i^{(0)}$ ثم تعوض هذه القيم في منظومة المعادلات للحصول على قيم جديدة وهي $x_i^{(1)}$ وتعوض ايضاً في مجموعة المعادلات للحصول على تقديرات جديدة هي $x_i^{(2)}$ والآخرى تعوض ايضاً ونستمر حين لا نجد أي تغيير في قيم x_i . أي ان العلاقة التالية تمثل خلاصة العمليات التكرارية.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_j a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

حين الحصول على الدقة المطلوبة بان تصبح قيم x ثابتة تقريباً.

مثال 8-12:

استخدم خمسة تقريبات في ايجاد مجموعة الحلول لمنظومة المعادلات

التالية بطريقة جاكوبي

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$

$$-x_1 + 2x_2 = 3$$

حل المعادلات
الخطية واللاخطية

نبدل المعادلتين الثانية والثالثة لان $a_{33}=0$ وتصبح المعادلات كما ياتي:

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11$$

$$-x_1 + 2x_2 = 3 \dots\dots\dots(1)$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$

ومن هذه العلاقات نجد ان

$$x_1 = \frac{11}{4} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3$$

$$x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1 \dots\dots\dots(2)$$

$$x_3 = 4 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2$$

نختار متجه التقريبات الاولى الاتي:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= \begin{pmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & x_3^{(0)} \end{pmatrix} \\ &= (1 \quad 1 \quad 1) \end{aligned}$$

وبالتعويض في المعادلات السابقة (2) ينتج:

$$x_1^{(1)} = \frac{11}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2$$

$$x_2^{(1)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$x_3^{(1)} = 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

أي ان

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \frac{13}{4} \end{pmatrix}$$

وبالتعويض مرة اخرى في المعادلات السابقة (2) للمتجه $x^{(1)}$ ينتج:

$$x_1^{(2)} = \frac{11}{4} - \frac{1}{2}(2) - \frac{1}{4}\left(\frac{13}{4}\right) = \frac{15}{16}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(2) = \frac{5}{2}$$

$$x_3^{(2)} = 4 - \frac{1}{2}(2) - \frac{1}{4}(2) = \frac{5}{2}$$

ونستمر بالتعويض التكراري فنحصل على جدول القيم التالي:

K	$\underline{X_1}$	$\underline{X_2}$	$\underline{X_3}$
0	1	1	1
1	2	2	$\frac{13}{4}$
2	$\frac{15}{16}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$

حل المعادلات
الخطية واللاخطية

K	$\underline{X_1}$	$\underline{X_2}$	$\underline{X_3}$
3	$\frac{7}{8}$	$\frac{63}{32}$	$\frac{93}{32}$
4	$\frac{133}{128}$	$\frac{31}{16}$	$\frac{393}{128}$
5	$\frac{519}{512}$	$\frac{517}{256}$	$\frac{767}{256}$

ونلاحظ ان التقريبات المحسوبة في التكرار الخامس تختلف عن الحل المضبوط (1،2،3) بحدود 1٪ ويمكن زيادة عدد التكرارات اكثر للحصول على الدقة المطلوبة.

ملاحظة: يمكن وضع مقياس معين لمعرفة افضل تقريب وهو:

$$E = A X^{(i)} - b$$

اذ ان $x^{(i)}$ هو اخر تقريب تم ايجاده فكلما كانت قيمة E مقربة من الصفر كلما كان متجه التقريب اقرب الى الحل المضبوط.

مثال 8-12:

استخدم طريقة جاكوبي لحل منظومة المعادلات التالية:

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9$$

معتمدا اربعة تقريبات فقط

$$x^0 = (1 \ 1 \ 1)$$

من المعادلات السابقة نجد ان

$$x_1 = 1 - \frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3$$

$$x_2 = 1 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3$$

$$x_3 = \frac{9}{2} - x_1 + \frac{1}{2}x_2$$

وبالتعويض الاولي ينتج

$$x_1^{(1)} = 1 - \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$x_2^{(1)} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_3^{(1)} = \frac{9}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 4$$

$$x^{(1)} = (1 \ 0 \ 4)$$

$$x_1^{(2)} = 1 - \frac{1}{5}(4) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

حل المعادلات
الخطية واللاخطية

$$x_2^{(2)} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(4) = -\frac{3}{2}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$$

$$x^2 = \left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{2}, \frac{7}{2} \right)$$

$$x_1^{(3)} = 1 - \frac{3}{5} \left(-\frac{3}{2} \right) - \frac{1}{5} \left(\frac{7}{2} \right) = 1 + \frac{9}{10} - \frac{7}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$x_2^{(3)} = 1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{5} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2} \right) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{7}{4} = -\frac{17}{20}$$

$$x_3^{(3)} = \frac{9}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right) = \frac{9}{2} - \frac{1}{5} - \frac{3}{4} = -\frac{71}{20}$$

8-2-2-2 طريقة كاوس – سيدال Gauss – Seidel Method :

لا تختلف هذه الطريقة عن سابقتها (طريقة جاكوبي) كثيرا. اذ ان
احدث تقريب للمتغير الاول يستخدم في ايجاد تقريب المتغير الثاني والاخير
يستخدم في تقريب المتغير الثالث وهكذا تكرر هذه العملية في حين في
الطريقة السابقة يتم ايجاد تقريرات جميع المتغيرات وتستخدم في التكرار الثاني
للتقريب. وان من مميزات هذه الطريقة ان التقارب في هذه الطريقة اسرع من
الطريقة السابقة وفيما ياتي العلاقات التي تستخدم في التقريب.

$$x_1^{(k+1)} = \left[b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j^{(k)} \right] / a_{11}$$

$$x_2^{(k+1)} = \left[b_2 - a_{21} x_1^{(k+1)} - \sum_{j=2}^n a_{2j} x_j^{(k)} \right] / a_{22}$$

$$x_3^{(k+1)} = \left[b_3 - \sum_{j=1}^2 a_{3j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=2}^n a_{3j} x_j^{(k)} \right] / a_{33}$$

وبشكل عام فان قيمة المتغير x_i الجديدة في التكرار $k+1$ يحسب وفق

العلاقة التالية:

$$x_i^{(k+1)} = \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right] / a_{ii} \quad i=1,2,\dots,n$$

أي اننا نحتاج ايجاد تقريب واحد فقط لـ x_i وهي احدث قيمة قد

حصلنا عليها لاننا نستخدم القيم الجديدة فقط.

مثال 14-8:

استخدم طريقة كاوس - سيدال لحل نظام المعادلات في المثال (8-12)

$$x_1 = \frac{11}{4} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3$$

$$x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1$$

حل المعادلات
الخطية واللاخطية

$$x_3 = 4 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2$$

وعند استخدام القيم الابتدائية $x^0 = (1 \ 1 \ 1)$ فتعطينا التكرار

الاول وهو:

$$x_1^{(1)} = \frac{11}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2$$

ويستخدم الاخير $x_1 = 2$ في ايجاد $x_2^{(1)}$ أي ان

$$x_2^{(1)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

ويستخدم $x_1 = 2$ ، $x_2 = \frac{5}{2}$ في ايجاد $x_3^{(1)}$ أي ان

$$x_3^{(1)} = 4 - \frac{1}{2}(2) - \frac{1}{4}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{19}{8}$$

اما التكرار الثاني فيكون:

$$x_1^{(2)} = \frac{11}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{19}{8}\right) = \frac{29}{32}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{29}{32}\right) = \frac{125}{64}$$

$$x_3^{(2)} = 4 - \frac{1}{2}\left(\frac{29}{32}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{125}{64}\right) = \frac{783}{256}$$

كما يمكن اجراء التكرار الثالث لنحصل على الجدول التالي:

K	$\underline{X_1}$	$\underline{X_2}$	$\underline{X_3}$
0	1	1	1
1	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{19}{8}$
2	$\frac{29}{32}$	$\frac{125}{64}$	$\frac{783}{256}$
3	$\frac{1033}{1024}$	$\frac{4095}{2048}$	$\frac{24541}{8192}$

تمارين الفصل الثامن

1. استخدم طريقة نيوتن - رافسن لإيجاد جذر المعادلة $x = e^{-x}$ لاربعة ارقام عشرية.

2. استخدم طريقة التكرار لحل المعادلة $x + \ln x = 0$ وابحث عن افضل صيغة بين الصيغ التالية:

$$x_{n+1} = -\ln x_n \dots\dots\dots(1)$$

$$x_{n+1} = e^{-x_n} \dots\dots\dots(2)$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2} \dots\dots\dots(3)$$

3. استخدم الطريقة التكرارية لإيجاد قيمة x_2 في الصيغتين التاليتين:

$$x_{i+1} = \frac{e^{x_i}}{3} \dots\dots\dots(1)$$

$$x_{i+1} = \ln(3x_i) \dots\dots\dots(2)$$

4. باستخدام طريقة نيوتن - رافسن اوجد جذرا للمعادلة $z^2 + 1 = 0$ مستخدما القيمة الاولى $z_0 = 1 + i$.

5. المعادلة التالية لها جذر واحد يقع بين القيمتين [2،1].

$$X^6 = x^4 + x^3 + 1$$

اوجد مقدار هذا الجذر لسته ارقام عشرية.

6. باستخدام طريقة التنصيف اوجد قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt[3]{25}$ لرقمين

معنويين.

ملاحظة: اعتبر $f(x) = x^3 - 25$.

7. أي الفترتين [3،2]، [2،1] نضمن ان فيها جذرا للمعادلة التالية:

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$$

مستخدما طريقة التنصيف.

8. استخدم طريقة القاطع لايجاد جذر المعادلة ضمن المجال [3،2].

$$X^3 - 5x = 0$$

9. استخدم طريقة نيوتن - رافسون لايجاد جذر للمعادلة $x \ln x = 1$

لخمسة ارقام عشرية.

10. استخدم طريقة كاوس الخلفية لحل لمجموعة المعادلات التالية:

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 0$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 0$$

11. طبق ثلاث خطوات من طريقة كاوس - سيدال لحل المعادلتين
الآتيتين:

$$x_1 + 4x_2 = 6$$

$$5x_1 - 2x_2 = 19$$

استخدم القيم الابتدائية $x^{(0)} = (0 \ 0)$

12. حل مجموعة المعادلات التالية بطريقة كاوس سيدال.

$$-2x_1 + x_2 = -1$$

$$x_3 - 2x_4 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$

طبق تكرارين باستخدام القيم الأولية $x^{(0)} = (0 \ 0 \ 0 \ 0)$.

حل المعادلات
الخطية واللاخطية

13. حل كلا من المصفوفتين التاليتين الى عاملها المثلثين U , L بطريقة

كروات بحيث يكون $l_{ij}=1$.

$$a = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 & -1.5 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -4.5 & 5 \end{pmatrix}$$

14. باستخدام طريقة جولسكي حل المصفوفة A التالية الى حاصل

ضرب مصفوفتين بالصورة $A = LL^T$ اذ ان L مصفوفة مثلثية سفلى.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

15. استخدم طريقة كروات لايجاد كل من النظامين الخطيين التاليين:

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$2x_1 - x_2 = 3$$

$$a) -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -1$$

$$b) -x_1 + 2x_2 - x_3 = -3$$

$$-x_2 + 2x_3 = 1.5$$

$$-x_2 + 2x_3 = 1$$

16. باتباع طريقة كروات لحل النظام الخطي ثلاثي القطر اوجد حل

النظام الخطي $Ax = b$ اذ ان:

A مصفوفة ثلاثية القطر (10×10) تعرف بالعلاقات التالية:

$$a_{ii} = 2$$

لجميع قيم i

$$a_{i,i+1} = -1 = a_{i,i-1}; i = 2, 3, \dots, 9$$

$$a_{12} = a_{10,9} = -1$$

اما المتجه b فيعرف بالعلاقات التالية:

$$b_1 = b_{10} = 1$$

$$b_i = 0, i = 2, 3, \dots, 9$$

17. اثبت ان طريقة جاكوبي وطريقة كاوس سيدال تتقارب لاي حل

تقريبي ابتدائي عند حل النظام الخطي التالي:

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

18. اوجد حل النظام الخطي التالي بطريقة جولسكي كع التقريب لثلاثة

ارقام

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

19. اكتب النظام الخطي التالي في صورة مناسبة لتطبيق طريقة جاكوبي.

$$4x_1 - x_2 = 2$$

$$-x_1 + 4x_2 - x_3 = 6$$

$$-x_2 + 4x_3 = 2$$

طبق ثلاثة تكرارات مبتدأً بالحل الصفري مستخدم دقة تصل الى خمسة ارقام.

20. اوجد حل النظام الخطي التالي $Ax = b$ باستخدام.

أ. طريقة جولسكي.

ب. طريقة كاوس - سيدال مبتدأً بالمتجه الصفري.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



الفصل التاسع

التفاضل والتكامل العددي

Numerical Differentiation & Integration

9-1 التفاضل العددي Numerical Differentiation

9-2 التكامل العددي Numerical Inegration



التفاضل والتكامل العددي

9.1 التفاضل العددي Numerical Differentiation

إذا كانت $f(x)$ دالة لها قيم معلومة عند بعض النقاط في جدول ذو مسافات متساوية والمطلوب ان نجد مشتقة الدالة $f(x)$ عند احدى نقاط الجدول او نقطة غيرها.

9.1.1 صيغ المشتقات عند نقاط جدول البيانات

هناك بعض الصيغ العددية التي تعطي قيما تقريبية للمشتقة الاولى والثانية والدرجات العليا عند احدى نقاط الجدول.

نحن نعلم من خلال العلاقات بين المعاملات الخطية في فصل الاستكمال ان

$$hD = \text{Log}(1 + \Delta)$$

اذ ان D هو معامل التفاضل $D = \frac{d}{dx}$ و Δ هو معامل الفروق

الامامية

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\therefore D = \frac{1}{h} \text{Log}(1 + \Delta)$$

وباستخدام متسلسلة تايلر نحصل على:

$$D = \frac{1}{h} \left[\Delta - \frac{1}{2} \Delta^2 + \frac{1}{3} \Delta^3 - \dots \right]$$

أي ان

$$Df(x) = f'(x) = \frac{1}{h} \left[\Delta f(x) - \frac{1}{2} \Delta^2 f(x) + \frac{1}{3} \Delta^3 f(x) - \dots \right] \dots (1)$$

فهذه الصيغة تعطي المشتقة الاولى للدالة $f(x)$ بدلالة الفروق الامامية Δ^k ومسافة h .

وهناك صيغة اخرى تقريبية مبسطة للمشتقة $f'(x)$ يمكن الحصول عليها من الحد الاساسي في حساب المشتقة من العلاقة (1).

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \Delta f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \dots (2)$$

كما ان هناك صيغة تقريبية ثالثة مبسطة للمشتقة $f'(x)$ يمكن الحصول عليها بدلالة الفروق الخلفية ∇ تشبه العلاقة (1) التي تعطي $f'(x)$ بدلالة الفروق الامامية هي

$$f'(x_0) = \frac{\nabla f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \dots (3)$$

استخدم الصيغتين (2) و (3) للفروق الامامية والخلفية للدالة $f(x) = \sin x$ عندما $h=0.1$ عند $x=1$.

باستخدام الصيغة (2)

$$f'(x) = \frac{0.891207 - 0.841471}{0.1} = 0.49736$$

باستخدام الصيغة (3)

$$f'(x) = \frac{0.841471 - 0.783327}{0.1} = 0.58148$$

9.1.2 صيغ عددية للمشتقات عند نقاط ليست بجدول البيانات:

فيما يلي بعض العلاقات المفيدة في الحصول على المشتقات المختلفة عند نقطة غير موجودة بالجدول مستخدمين صيغ الاستكمال للحصول على قيم للدالة عند نقاط ليست موجودة في الجدول، فاذا فاضلنا هذه الصيغ عدة مرات تعطينا الصيغة المطلوبة فمثلا العلاقة التالية للفروق الامامية لنيوتن.

$$y_k = \sum_{i=0}^k C_i^k \Delta^i y_0$$

$$= y_0 + k\Delta y_0 = \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots$$

$$y_k = f(x_k), x_k = x = x_0 + kh$$

فاذا فاضلنا طرفي العلاقة بالنسبة الى k ينتج:

$$\frac{d}{dk} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{dx}{dk} = h \cdot \frac{d}{dx}$$

$$\frac{dy_k}{d_k} = \frac{df(x_k)}{d_k} = h \frac{df(x_k)}{d_x} = hf'(x) = hf'(x_k) = h \cdot f'(x_k)$$

وعليه فان:

$$hf'(x_k) = \Delta y_0 + \frac{1}{2}(2k-1)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}(3k^2 - 6k + 2)\Delta^3 y_0 \dots$$

$$\therefore f'(x_k) = y'_k = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \left(k - \frac{1}{2}\right) \Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}(3k^2 + 6k + 2)\Delta^3 y_0 + \dots \right] \dots (4)$$

وبمفاضله الدالة (4) ينتج:

$$f''(x_k) = y''_k = \frac{1}{h^2} [\Delta^2 y_0 = (k-1)\Delta^3 y_0 + \dots] \dots \dots \dots (5)$$

وبمفاضله الدالة (4) ينتج:

$$y'''_k = \frac{1}{h^3} [\Delta^3 y_0 + \dots]$$

فاذا كانت x_k نقطة في الجدول فان $k=0$ بينما اذا لم تكن بالجدول فان

$$k \neq 0$$

مثال 2-9:

افرض ان $f(x)$ دالة معلومة قيمها عند النقاط.

X	4	6	8	10
F	1	3	8	20

اوجد قيم y', y'', y''' عند النقاط $x = 4.5, x = 4$

<u>x</u>	<u>y</u>	<u>Δ</u>	<u>Δ^2</u>	<u>Δ^3</u>
4	1			
		2		
6	3		3	
		5		4
8	8		7	
		12		
10	20			

أ. عند النقطة $x=4$

$$y'(4) = \frac{1}{2} \left[2 + \left(-\frac{1}{2} \right) (3) + \frac{2}{6} (4) \right] = \frac{11}{12}$$

$$y''(4) = \frac{1}{4} (3 - 4) = -\frac{1}{4}$$

$$y'''(4) = \frac{1}{8} (4) = \frac{1}{2}$$

ب. عند النقطة $x=4.5$.

ليست موجودة في الجدول واقرب نقطة لها هي $X=4$ لذلك فان $x_0=4$ وبذلك تكون.

$$k = \frac{4.5 - 4}{2} = \frac{1}{4}$$

$$y'(4.5) = \frac{1}{2} \left[2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) (3) + \frac{1}{6} \left(\frac{3}{16} - \frac{6}{4} + 2 \right) (4) + \dots \right] = \frac{41}{48}$$

$$y''(4.5) = \frac{1}{4} \left(3 + \left(\frac{1}{4} - 1 \right) (4) \right) = 0$$

$$y'''(4.5) = \frac{1}{8} (4) = \frac{1}{2}$$

9.2 التكامل العددي Numerical Inegration

إذا كان لدينا التكامل المحدود التالي:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

فقد يكون من الصعب أو استحالة إيجاد قيمة هذا التكامل بالطرق التحليلية الاعتيادية حتى لو كانت الدالة ذا شكل تحليلي بسيط مثل:

$$\int_0^4 e^{-x^2} dx$$

او قد تكون الصيغة التحليلية للدالة $f(x)$ غير معلومة وانما نعلم فقط بعض قيم الدالة عند نقاط مختلفة فنلجأ الى استخدام طرق التكامل العددي لاجاد تقريب لقيمة هذا التكامل. وهناك عدد كثير من طرق التقريب وفيما ياتي بعضها:

9.2.1 طريقة شبه المنحرف المصغر المنحرف Trapezoidal Rule

تقوم هذه القاعدة بتقريب المساحة المطلوبة تحت منحنى الدالة $f(x)$ بالمساحة الواقعة تحت المستقيم الواصل بين نقطتين على منحنى $f(x)$ وكما في الشكل التالي:

اذ ان تلك النقطتين هما $(x_0, f(x_0))$ ، $(x_1, f(x_1))$ وبتطبيق قانون مساحة شبه المنحرف نحصل على:

$$I = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] = \frac{x_1 - x_0}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$

أي ان

$$I = \frac{h}{2} [f(a) + f(b)]; h = b - a$$

مثال 3-9:

اوجد القيمة التقريبية للتكامل التالي بطريقة شبه المنحرف.

$$\int_0^1 (x^3 + 1) dx$$

الحل: من خلال التكامل نجد ان $x_1=1$ ، $x_0=0$ أي ان $h=1$

وان

$$f(x) = x^3 + 1$$

$$f(x_0) = 1, \quad f(x_1) = 2$$

وعليه فان:

$$\int_0^1 (x^3 + 1) dx = \frac{1}{2}(1 + 2) = \frac{3}{2} = 1.5$$

مثال 4-9:

$$I = \int_0^2 (x^2 + 1) dx \quad \text{جد قيمة تقريبية للتكامل}$$

$$h=1, \quad f(x_0) = f(0) = 1, \quad f(x_1) = f(2) = 5$$

$$I = \frac{1}{2}(1 + 5) = \frac{6}{2} = 3$$

فاذا عدنا لقاعدة الشكل الرباعي شبه المنحرف الاساسية والتي هي

تقريب للدالة $f(x)$ وكتبت بدالة متعددة حدود من الدرجة الاولى بين النقطتين x_0, x_n منها كانت صيغة الدالة، وعندما $n > 1$ فان:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx. (1)$$

وبما ان

$$f(x) = \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

ولكل فترة جزئية (x_i, x_{i+1}) وعند التعويض عن $f(x)$ في الصيغة (1)

ينتج:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx &= \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2} [f(x_1) + f(x_2)] + \dots + \frac{h}{2} [f(x_{n-1}) + f(x_n)] + E \\ &= A_n + E \end{aligned}$$

اذ ان A_n تسمى بالقاعدة العامة للشكل الرباعي شبه المنحرف، وان

$$E \text{ هو الفرق بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية. وان } h = \frac{x - x_0}{n}$$

أي ان:

$$A_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_n)] + h \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

مثال 5-9:

جد القيمة التقريبية للتكامل التالي مستخدماً $n=2$ ، $n=4$ ، $n=8$

$$I = \int_0^1 f(x^2 + 1) dx$$

عندما $n=2$ فإن $h = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$ وعليه فإن:

$$A_2 = \frac{h}{2} [f(0) + f(1)] + hf\left(\frac{1}{2}\right)$$

لان مجال التكامل $[1, 0]$ قد قسم الى قسمين أي

$$A_2 = \frac{0.5}{2} (1 + 2) + \frac{1}{2} (1.25) = 1.375$$

باعتبار ان:

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.25$$

وعندما $n=4$ فإن $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$ وان

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 1.0625, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.25, f\left(\frac{3}{4}\right) = 1.5625$$

فان:

التفاضل
والتكامل العددي

$$A_4 = \frac{h}{2} [f(0) + f(1)] + h \left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right]$$

$$= \frac{0.25}{2} (1 + 2) + 0.25(1.0625 + 1.25 + 1.5625) = 1.34375$$

وعندما $n=8$ فإن $h = \frac{1}{8} = 0.125$ وان

$$A_n = \frac{0.125}{2} [f(0) + f(1)] + 0.125 \left[f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{2}{8}\right) + \dots + f\left(\frac{7}{8}\right) \right]$$

$$= 1.33594$$

وعند زيادة قيمة n فإن القيمة التقريبية للتكامل تقترب من القيمة الحقيقية له.

9.2.2 قاعدة سمبسون Simpson Rule:

إذا فرضنا ان $x_0=a$ ، $x_2=b$ وان $x_1 = \frac{a+b}{2}$

أي ان

$$x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h$$

وإذا فرضنا ان $f(x_0)$ ، $f(x_1)$ ، $f(x_2)$ جميعها معلومة. فإن قاعدة

سمبسون تقوم على اساس تقريب المساحة المطلوبة تحت منحنى الدالة

$f(x)$ بالمساحة تحت منحنى متعدد الحدود $p_2(x)$ الذي يمر بالنقاط $(x_0, f(x_0))$ ، $(x_1, f(x_1))$ ، $(x_2, f(x_2))$ وحسب الشكل التالي:

وبما ان

$$p_2(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2$$

أي ان

$$I = \int_a^b P_2(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} (C_0 + C_1x + C_2x^2) dx$$

اذ يمكن الحصول على قيم C_0 ، C_1 ، C_2 بالتعويض بالنقاط الثلاث في الدالة.

بعد تحليل الصيغة $p_2(x)$ نحصل على

$$I = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \dots\dots\dots (9-2)$$

اذ ان

$$h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \frac{b-a}{2} = \frac{x_2 - x_0}{2}$$

وتسمى الصيغة (9-2) السابقة بصيغة سمبسون البسيطة.

احسب قيمة التكامل التالي بقاعدة سمبسون

$$I = \int_1^3 (x^3 - 2x^2 + 7x - 5) dx$$

$$x_0 = 1 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 3 \quad h = 1$$

$$f(x_0) = 1 \quad f(x_1) = 9 \quad f(x_2) = 25$$

$$I = \frac{1}{3} [f(1) + 4f(2) + f(3)] = \frac{1}{3} [1 + 4(9) + 25] = \frac{62}{3}$$

وعند تجزئة مجال الدالة $f(x)$ الى اجزاء عددها n (عدد زوجي) فان

صيغة سمبسون تصبح:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$$

احسب القيمة التقريبية للتكامل التالي بطريقة سمبسون عندما $n = 4$

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$$

$$h = \frac{b-a}{4} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$I = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

$$I = \frac{0.25}{3} \left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) \right]$$

$$= \frac{0.25}{3} (0 + 1.015625 + 1.125 + 4.265625 + 2) = 0.70052$$

9.2.3 صيغ نيوتن كوتس المفتوحة

Open Newton – Gotes formula:

ان قواعد الشكل الرباعي شبه المنحرف وسمبسون من القواعد التي تسمى بقواعد نيوتن – كوتس للتكامل وهناك قواعد اخرى تنتمي الى هذه العائلة ولكن جميعها نفرض ان:

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}, \quad x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n$$

وهناك قواعد اخرى تذكر منها ما ياتي:

1. قاعدة $\frac{3}{8}$ لسمبسون والمتمثلة بالصيغة التالية:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3}{8} h [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

2. قاعدة بول Bool's Rule وصيغتها هي:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) dx = \frac{2}{45} h [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$$

3. يمكن كتابة الصيغة العامة لنيوتن – كوتس والتي تضم الصيغتين

السابقتين ما يأتي:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = Ch [C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) + \dots + C_n f(x_n)]$$

علماء بان قيم C_i, C هي الموضحة في الجدول التالي:

n	C	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
1	$\frac{1}{2}$	1	1							
2	$\frac{1}{3}$	1	4	1						
3	$\frac{3}{8}$	1	3	3	1					
4	$\frac{2}{45}$	7	32	12	32	7				
6	$\frac{1}{140}$	41	216	27	272	27	216	41		
8	$\frac{4}{14175}$	989	5888	-928	10496	-4540	10496	-928	5888	989

اما الصيغ من الدرجات الاعلى فنادرا ما تستخدم، بسبب وجود
صيغ متاحة ابسط وتساويها في الدقة.

مثال 8-9:

استخدم صيغة نيوتن كوتس المفتوحة لايجاد قيمة التاكمل التالي
عندما $n=2$.

$$\int_1^{1.3} \sqrt{x} dx$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1.15$$

$$x_2 = 1.3$$

$$\int_1^{1.3} \sqrt{x} dx = \frac{1}{3} h [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$f(x_0) = \sqrt{1} = 1 \quad f(x_1) = \sqrt{1.15} = 1.072380529$$

$$f(x_2) = \sqrt{1.3} = 1.140175425 \quad h = 0.15$$

$$I = \frac{0.15}{3} [1 + 4(1.072380529 + 1.140174525)] = 0.321484877$$

تمارين الفصل التاسع

1. الجدول التالي يعطي بعض قيم $y = f(x)$.

X	1.08	1.12	1.16	1.2
y	0.295	0.295	0.290	0.28

استخدم صيغة الفروق للامام والفروق للخلف لايجاد مشتقة الدالة

عندما $x = 2.5$ علما بان $h = 0.1$.

2. الجدول الاتي يعطي قيا للتطبيق y اوجد قيمة المشتقة y', y'' عندما

$x = 0.5$.

X	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65
y	1.521525	1.505942	1.487968	1.467462	1.444243	1.418083	1.388686

3. اوجد قيمة تقريبية لـ $f'(x)$ عندما $x = 0.35$ اذ ان f معرفة بالقيم

التالية:

X	0.1	0.2	0.3	0.4
F(x)	0.90484	0.81873	0.754082	0.67032

4. استخدم كلا من قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون لحساب قيمة التكامل.

$$\int_0^{\pi/2} f(x) dx$$

باستخدام البيانات التالية

X	0	$\pi/12$	$2\pi/12$	$3\pi/12$	$4\pi/12$	$5\pi/12$	$\pi/2$
F(x)	0	0.25882	0.5	0.70711	0.86603	0.96593	1

5. احسب قيمة التكامل

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

باستخدام قاعدة سمبسون متخذا $h = 0.25$.

6. استخدم قاعدة شبه المنحرف متخذا $h = 0.5$ مرة و $h = 0.25$ مرة

اخرى عندما $n = 2$ ، $n = 4$ لايجاد تقريب التكامل التالي:

$$\int_1^2 \frac{e^x}{1+x} dx$$

7. احسب لثلاثة ارقام عشرية لايجاد قيمة التكامل التالي بطريقة سمبسون عندما $n = 2$.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

8. البيانات التالية تمثل قيم معلومة للدالة $f(x) = e^x$ احسب قيمة التكامل $\int_1^2 f(x) dx$.

أ. بطريقة شبه المنحرف عندما $n=4$ ، $n=6$.

ب. بطريقة سمبسون عندما $n=2$ ، $n=4$.

X	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1
F(x)	3.004	3.669	4.482	5.474	6.686	8.199

9. استخدم صيغة نيوتن - كوتس لايجاد قيمة التكامل التالي عندما $n=2$ ، $n=3$.

$$\int_1^{1.4} \frac{1}{x} dx$$

10. استخدم كل الصيغ المتوفرة لديك لإيجاد قيمة التكامل التالي عندما $n=4$ مع مقارنة بين نتائج الصيغ لتحديد أدقها.

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx$$





الفصل العاشر

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية

The Numerical Solution of Ordinary
Differentiation Equations

10-1 المقدمة:

10-2 طرائق حل المعادلات التفاضلية:



الحلول العددية للمعادلات التفاضلية

10.1 المقدمة:

في الفصول السابقة تم التطرق الى طرائق حل المعادلات التفاضلية بالطرائق التحليلية منها فصل المتغيرات، والعامل التكاملي وغيرها. ولكن معظم المعادلات التفاضلية التي نحصل عليها في الحياة العملية التطبيقية هي من النوع الذي لا يمكن ايجاد حلها بالطرق التحليلية وان المطلوب ايجاد قيم عددية للحل فانه بالامكان استخدام الطرق العددية لايجاد حل لهذه المعادلات التفاضلية.

فاذا كان لدينا $y' = f(x, y)$ والمطلوب حل هذه المعادلة التفاضلية لقيمة معينة x ، فيمكن تجزئة مجال الدالة ولنفرض انه $[a, b]$ الى n من الاجزاء ثم نجد x_i اذ ان $x_0 = a, x_i = x_{i-1} + h$ وان $h = \frac{b-a}{n}$ ثم نجد $f(x_1) \dots f(x_n)$ بواسطة الطرائق العددية من المعروف ان $f(x_i)$ هي قيم تقريبية. ان بعض هذه الطرائق تحتاج الى قيمة ابتدائية واحدة هي x_0 لغرض ايجاد قيمة جديد لـ $f(x)$ والتي تسمى بطرائق الخطوة الواحدة اما

الطرائق الأخرى تحتاج إلى عدة قيم ابتدائية وستتطرق في هذه الفصل
الطرائق التي تحتاج قيمة واحدة وهي:

10.2 طرائق حل المعادلات التفاضلية:

10.2.1 صيغة اويلر Euler's Formula

لنفرض لدينا المعادلة التفاضلية.

$$y' = f(x, y) \quad . \quad f(x_0) = y_0$$

فإن أبسط الطرائق التقريبية لحل المعادلة التفاضلية هي صيغة اويلر

التالية:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

اذ نجد قيمة y_{n+1} التي هي القيمة التقريبية لـ y عندما $x = x_{n+1}$ وأن

$$h = x_{n+1} - x_n$$

مثال 10-1:

اوجد قيمة $f(0.2)$ للمعادلة التفاضلية $f'(x) = -xy$ علماً بأن

$$f(0) = 0.5$$

$$x_0 = 0 \quad f(x_0) = 0.5, \quad x_1 = 0.2 \quad h = 0.2$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0.5 + 0.2 (0 \times 0.5) = 0.5$$

اوجد القيمة التقريبية $f(1.1)$ للمعادلة التفاضلية $f'(x) = xy^2$ علما بان $f(1)=2$.

$$x_0 = 1 \quad x_1 = 1.1, \quad h = 0.1 \quad y_0 = 2$$

$$\begin{aligned} y_1 &= f(1.1) = y_0 + hf(x_0, y_0) \\ &= 2 + 0.1 (4) = 2.4 \end{aligned}$$

ان صيغة اويلر تعطي قيم تقريبية بعيدة عن القيم الحقيقية، لذلك اجريت بعض التعديلات عليها ونتاجت عنها صيغ اخرى مطورة كما سيرد ذكرها في الصيغ اللاحقة.

10.2.2 صيغة تايلر Taylor's Formula

بالامكان استخدام مفكوك تايلر لايجاد $f(x_0+h)$ وكما ياتي:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots$$

وبالامكان استخدام بعض تلك الحدود من هذه المتسلسلة التي تعتمد على قيمة h فكلما كانت صغيرة فنحتاج الى عدد قليل من الحدود. وسيكون الناتج هو تقريبي. وان صيغة تايلر هي:

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n = y_n + hf(x_n, y_n)$$

أي ان

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n$$

مثال 3-10:

اوجد القيمة التقريبية $f(1.1)$ باستخدام صيغة تايلر من الرتبة الثانية
والرتبة الخامسة للمعادلة $y' = -y$ علما بان $f(1)=2$.

الحل:

$$f(x, y) = -y, \quad y' = -y$$

وان

$$y'' = \frac{df(x, y)}{dx} + \frac{df(x, y)}{dy} \cdot y' = -y' = y$$

أي ان

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n = y_n - hy_n + \frac{h^2}{2!} y_n$$

$$y_1 = y_0 - hy_0 + \frac{h^2}{2!} y_0 = 2 \left(1 - 0.1 + \frac{0.1^2}{2} \right) = 1.81$$

اما من المرتبة الخامسة فهي:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n + \frac{h^3}{3!} y'''_n + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}_n + \frac{h^5}{5!} y^{(5)}_n$$

وبالنسبة للمثال نجد ان:

$$y''' = -y \quad y^{(4)} = y, \quad y^{(5)} = -y$$

أي ان:

$$y_{n+1} = y_n + hy_n - \frac{h^2}{2!} y_n - \frac{h^3}{3!} y_n + \frac{h^4}{4!} y_n - \frac{h^5}{5!} y_n$$

وعند التعويض عن $x_0=1$ ، $h=0.1$ ، $n=0$ نحصل على:

$$y_1 = \left(1 - 0.1 + \frac{0.1^2}{2!} - \frac{0.1^3}{3!} + \frac{0.1^4}{4!} - \frac{0.1^5}{5!} \right) = 1.80967$$

مثال 4-10:

استخدم صيغة تايلر للحصول على حل للمعادلة التفاضلية

$$y' = x^{1/3} \quad \text{اذ ان} \quad f(1) = 1 \quad \text{ثم اوجد} \quad f(1.1).$$

$$y' = xy^{1/3}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{1}{3} x^2 y^{-1/3} + y^{1/3}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{1}{9}x^3y^{-1} + xy^{-1/3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{9}x^4y^{-5/3} - \frac{2}{3}x^2y^{-1} + y^{-1/3}$$

$$f(1.1) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f^{(2)}(x) + \frac{1}{6}h^3f^{(3)}(x) + \frac{1}{24}h^4f^{(4)}(x)$$

$$x = 1, \quad h = 0.1$$

$$f(1.1) = 1 + 0.1 + \frac{2}{3}(0.1)^2 + \frac{4}{27}(0.1)^3 + \frac{1}{54}(0.1)^4 = 1.10682$$

10.2.3 طريقة اويلر المطورة

Modified Euler Method:

ان طريقة اويلر تستخدم قيمة y_n لحساب القيمة التقريبية y_{n+1} وهذه القيمة لا تكون دقيقة بشكل عام. فيمكن تحسين قيمة الدالة y_{n+1} في النقطة x_{n+1} وذلك بإعادة احتساب قيمة y_{n+1} من معادلة الخط المستقيم بدلالة معدل ميل بداية ونهاية الفترة وكما يأتي:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad ((10-2))$$

ان قيمة y_{n+1} غير معروفة ضمن العلاقة (10-2) ويتم تخمينها باستخدام طريقة اويلر.

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية

ويمكن إعادة حساب قيم متعاقبة لـ y_{n+1} باستخدام أحد الطرق التكرارية ولتكن $y_{n+1}^{(0)}$ تمثل قيمة أولية لـ y_{n+1} فيمكن إعادة كتابة العلاقة (2-9) بالشكل التالي:

$$y_{n+1}^{(r+1)} = y_n + \frac{h}{2} \left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(r)}) \right]$$

مثال 5-10:

استخدم صيغة أويلر المطورة لحل المعادلة $y' = x - \frac{y}{2x}$ عندما $y_0 = 0.25$, $x_0 = 1$, $h = 0.04$ على أن تكون النتائج لخمس مراتب عشرية لقيم x من 1 إلى 1.2.

$$f(x_0, y_0) = 1 - \frac{0.25}{2} = 0.875$$

$$y_1^{(1)} = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0.25 + 0.04 * 0.875 = 0.285$$

$$f(x_1, y_1^{(1)}) = 1.04 - \frac{0.285}{2(1.04)} = 1.04 - 0.13701923 = 0.90298$$

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{h}{2} \left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)}) \right]$$

$$= 0.25 + \frac{0.04}{2} [0.875 + 0.90298] = 0.28555$$

$$f(x_1, y_1^{(2)}) = 1.04 - \frac{0.28555}{2(1.04)} = 0.9027163$$

$$y_1^{(3)} = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(2)})]$$

$$= 0.25 + \frac{0.04}{2} [0.875 + 0.9027] = 0.28555$$

ولايجاد النقطة الثانية $y_2^{(3)}$ فان:

$$f(x_1, y_1) = 1.04 - \frac{0.28555}{2(1.04)} = 0.90271$$

$$= 0.28555 + 0.04 * 0.9027163 = 0.3216586$$

$$y_2^{(1)} = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

$$f(x_2, y_2^{(1)}) = x_2 - \frac{y_2^{(1)}}{2x_2} = 1.08 - \frac{0.3216586}{2(1.08)} = 0.9310839$$

$$y_2^{(2)} = y_1 + \frac{h}{2} [f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(1)})] = 0.322226$$

$$f(x_2, y_2^{(2)}) = 1.08 - \frac{0.322226}{2(1.08)} = 0.93082$$

$$y_2^{(3)} = 0.3222207$$

فعند الاستمرار نجد ان:

$$y_3^{(3)} = 0.3600 \quad \text{عندما } x = 1.12$$

$$y_4^{(3)} = 0.3990 \quad \text{عندما } x = 1.16$$

$$y_5^{(3)} = 0.4391 \quad \text{عندما } x = 1.2$$

والقيمة الاخيرة $y_5^{(3)} = 0.4391$ مساوية للقيمة الحقيقية التي يمكن
ايجادها من العلاقة التالية:

$$f(x) = 0.4x^2 - \frac{0.15}{\sqrt{x}}$$

$$f(1.2) = 0.4(1.2)^2 - \frac{0.15}{\sqrt{1.2}} = 0.576 - 0.136930639 = 0.4391$$

10.2.4 طريقة رانج – كوتا Ranch – Kutta Method

ان طريقة اويلر من الناحية العملية فائدتها قليلة لانها تتطلب ان
تكون قيمة h صغيرة جدا للحصول على الدقة الجيدة. اما هذه الطريقة
فتعطي الدقة الجيدة وبجهد اقل حيث لا تحتاج الى حساب المشتقات كما
في صيغة تايلر وانما ايجاد قيمة الدالة $f(x, y)$ عدة مرات لنقاط مختارة في
كل فترة من الفترات الصغيرة للمجال المطلوب.

توجد صيغ مختلفة لطريقة رانج - كوتا او اربعة رتب وان اكثرها شيوعا واستخداما هي صيغة الرتبة الرابعة حيث تعطي نتائج دقيقة وسهلة الاستخدام وان اشتقاقها يعتمد على مفكوك تايلر وطريقة اويلر وان الصيغة للرتبة الرابعة هي:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

مثال 10-10:

استخدم طريقة رانج - كوتا من الرتبة الرابعة لحل المعادلة التفاضلية

$y' = x - \frac{y}{2x}$ من 1-1.2 عندما $h=0.04$ مرة و $h = 0.1$ مرة اخرى وان $y_0 = 0.25$.

الحل:

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 0.25$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

ولايجاد y_1 تحسب k_1, k_2, k_3, k_4 حيث $n=0$ أي ان:

$$k_1 = f(x_0, y_0) = x_0 - \frac{y_0}{2x_0}$$

$$f(1, 0.25) = 1 - \frac{1.25}{2 \times 1} = 0.875$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$= f\left[1 + \frac{0.04}{2}, 0.25 + \frac{0.04}{2}(0.875)\right]$$

$$= f(1.02, 0.2675) = 0.8889$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$= f\left[1 + \frac{0.04}{2}, 0.25 + \frac{0.04}{2}(0.8889)\right] = f(1.02, 0.2678)$$

$$= 1.02 - \frac{0.2678}{2(1.02)} = 0.8889$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + hk_3)$$

$$= f[1 + 0.04, 0.25 + 0.04(0.8889)]$$

$$= f(1.04, 0.2856)$$

$$= 1.04 - \frac{0.2856}{2(1.04)} = 0.9027$$

وعليه فان:

$$y_1 = 0.25 + \frac{0.04}{6} [0.875 + 2(0.8889) + 2(0.8889) + 0.9027]$$

$$= 0.2856$$

ولحساب قيمة y_2 يعاد حساب k_1, k_2, k_3, k_4 مرة اخرى

مستخدمين y_1 وكما ياتي:

$$k_1 = f(x_1, y_1) = f(1.04, 0.2856) = 0.9027$$

$$k_2 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = f(1.06, 0.3037) = 0.9167$$

$$k_3 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_3\right) = f(1.06, 0.3139) = 0.9167$$

$$k_4 = f(x_1 + h, y_1 + hk_3) = f(1.08, 0.3223) = 0.9308$$

أي ان:

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + k_3 + k_4)$$

$$y_2 = 0.2856 + \frac{0.04}{6}[0.9027 + 2(0.9167) + 2(0.9167) + 0.9308]$$

$$= 0.3223$$

وبنفس الاسلوب يمكن حساب y_3, y_4, y_5, y_6 والجدول الاتي

يمثل النتائج العددية.

عندما $h=0.04$.

X	Y
1	0.25
1.04	0.2855529
1.08	0.3222224
1.12	0.3600233
1.16	0.3989685
1.2	0.4390694

عندما $h=0.1$.

الحلول العددية
للمعادلات التفاضلية

X	Y
1	0.25
1.1	0.3409806
1.2	0.4390697

تمارين الفصل العاشر

1. استخدم طريقة حل المعادلات التفاضلية التالية:

أ. $y' = x - 2y + 1$ لقيم $x=1$ الى 1.5 اذ ان $h=0.1$ وان القيمة الابتدائية هي $(3,1)$.

ب. $y' = x + y$ لقيم $x=0$ الى 0.5 اذ ان $h=0.2$ وان القيمة الابتدائية $(1,0)$.

2. استخدم طريقة تايلر لايجاد حل المعادلات التفاضلية التالية:

أ. $y' = 2(3x + y)^3 - 1$ لقيم $x=[0,0.4]$ وان $h=0.1$ اذ ان $f(0)=1$.

ب. $y' = \frac{x^3 - 2y^3}{3xy^2}$ لقيم $x=[1,2.2]$ وان $h=0.4$ اذ ان $f(1)=1$.

3. استخدم طريقة رانج - كوتا (الرتبة الرابعة) لايجاد حل المعادلات التفاضلية في التمرين الاول.

4. اوجد المعادلة التفاضلية $y' = x + y$ عندما $f(0)=1$ وان $h=0.02$ لقيم $x=[0,0.1]$ باستخدام.

أ. طريقة اويلر.

ب. طريقة تايلر.

ج. طريقة رانج - كوتا.

وقارن النتائج مع الحل الحقيقي هو 1.1103 عندما $x=0.1$.

5. استخدم طريقة اويلر لإيجاد المعادلة التفاضلية $y' = -y$ إذا ان القيمة الابتدائية هي $y = 1$ عندما $x=0$ على ان يكون الناتج لاربع مراتب للقيم 0.2، 0.4، 0.6، 1.

6. جد حل المعادلة التفاضلية $y' = x - y^2$ عندما $x=[0,0.8]$ مستخدماً $h=0.1$ باستخدام.

أ. طريقة اويلر.

ب. طريقة اويلر المطورة.

ج. طريقة رانج - كوتا من الرتبة الرابعة.

7. استخدم طريقة تايلر على المعادلة $y' = -xy^2$ للحل الذي يحقق $f(0)=2$ للقيم $x=[0,0.4]$ مستخدماً $h=0.1$.

8. طبق طريقة رانج - كوتا على $f(1)=1$ للمعادلة التفاضلية

$$y' = xy^{1/3} \text{ عندما } h=0.1 \text{ وان } x_0=1.$$

9. استخدم طريقة اويلر على المعادلة $y' = -xy^2$ علما بان $f(0)=2$

$$\text{للقيم } x=[0,1] \text{ مستخدما } h=0.2.$$

10. استخدم طريقة اويلر المطورة لحل المعادلة التفاضلية

$$y' = x^2 - y^2 \text{ لقيم } x=[1,1.5] \text{ علما بان } h=0.2 \text{ اذ ان } f(1)=1.$$



المصادر العربية

1. بوردين ريتشارد، فاريز. دو كلاص " التحليل العددي " ترجمة السامرائي، خالد احمد مطبعة وزارة التعليم العالي والبحث العلمي 1992.
2. الشمري. د. محمد علي " التحليل العددي " سلسلة ملخصات مشوم، دار كاكر د حصيل للنشر 1981.
3. السيد. د. ابو بكر احمد " التحليل العددي " دار العلم للنشر والتوزيع، الكويت، 1988.
4. علي. د. علي عزيز، الحسوان، عبد الرزاق، حسين، عادل نبيل " مبادئ الرياضيات والتفاضل والتكامل " دار الكتب للطباعة والنشر جامعة الموصل 1980.
5. عبيد. طالب عبد الصمد " مبادئ الطرق العددية " مطبعة دار الحكمة - جامعة البصرة 1992.
6. عبد المطلب. د. إبراهيم، د. احمد عزت رياض، " رياضيات متقدمة للدراسات الهندسية " الجزء الثاني مطبعة التعليم العالي بغداد. الطبعة الأولى 1989.

7. عبد علي. د. سليم حسن، د. نعوم. رياض شاکر "طرق رياضية

متنوعة" دار الكتب للطباعة والنشر، جامعة الموصل 1978.

8. عبد الحسين. عباس حميد، عبد الوهاب. نجلاء "الرياضيات" دار

الكتب للطباعة والنشر. جامعة الموصل 1991.

9. اللامي. د. كاظم محمد حسين، "مقدمة في التحليل العددي" مطبعة

دار الكتب للطباعة والنشر 1987.

المصادر الأجنبية

10. Brauer. F, John. A. No hel "Ordinary differential equations" 2nd edition W.A. Benjamin Inc. London, 1973.

11. Frank. A "Differential equations" Mc Graw Hill, New York, 1972.

12. Green. S.L. "Introduction to differential equations" University Tutorial Press LTD 1969.

13. Myron B. Allen, Eli L. Isaaxson "Numerical Analysis For Applied Science" John Wiley and Sons. Inc 1998.

14. Tranter. C.J "Advance level pure Mathematics" The English university press LTD, London, 1961.

15. Vzailser. V, Skavavi. M.I, "Elementary Mathematics" 1978, MIR publishers Moscow .

16. William S.D and Daniel, "Numerical Methods" John Wiley & Sons Inc, 1972.

الرياضيات والتحليل العددي

وكلاء وموزعي دار اليازوري في العالم

الدولة	المدينة	اسم الدار	الهاتف	الدولة	المدينة	اسم الدار	الهاتف
الأردن	عمان	الإدارة العامة	5690904	الأردن	إربد	حمادة للنشر والتوزيع	02 7270100
الأردن	عمان	فرع عمان	5690904	الأردن	الكرك	فرع الدار في الكرك	03 2302111
السعودية	الرياض	مؤسسة الجريسي	4039328	ليبيا	طرابلس	مكتبة طرابلس	213601583
السعودية	الرياض	دار الزهراء	4641144	ليبيا	طرابلس	دار الحكمة	213606571
السعودية	الرياض	مكتبة العبيكان	4650071	ليبيا	طرابلس	الدار العربية للكتاب	3330384
السعودية	الرياض	مكتبة جرير التجارية	4626000	ليبيا	طرابلس	دار الرواد	3350333
السعودية	الرياض	مكتبة الخرجي	4646258	العراق	بغداد	مكتبة دجلة	0096418170792
السعودية	جدة	مكتبة كنوز المعرفة	6570628	العراق	الموصل	دار ابن الأثير	7702036776
السعودية	الدمام	مكتبة المتنبي	8272906	العراق	بغداد	مكتبة الذاكرة	796449420
السعودية	المنورة	مكتبة الزمان	8366666	الكويت	الكويت	مكتبة ذات السلاسل	466255
السعودية	الرياض	مكتبة الرشيد	4593451	فلسطين	غزة	مكتبة سمير منصور	97082825688
السعودية	الرياض	دار المريح	4657939	فلسطين	رام الله	مكتبة الشروق	02-2961614
السعودية	الرياض	مكتبة الشقري	4611717	فلسطين	الخليل	مكتبة دنديس	2225174
السعودية	جدة	تهامة للنشر	65152845	فلسطين	رام الله	دار الرعاية	22961613
السعودية	جدة	مكتبة المأمون	6446614	فلسطين	غزة	مكتبة اليازجي	287099
السعودية	مكة المكرمة	مكتبة الثقافة	5429049	سورية	دمشق	مكتبة النوري	2311189
الجزائر	الجزائر	دار الثقافة العلمية	21541135	سورية	حلب	دار القلم العربي	2113129
الجزائر	وهران	دار ابن النديم	41359788	السودان	الخرطوم	الدار السودانية للكتب	6780031
الجزائر	الجزائر	دار الكتاب الحديث	354105	البحرين	المنامة	المكتبة الوطنية	293840
الجزائر	الجزائر	مؤسسة الضحى	214660	البحرين	المنامة	المكتبة العلمية	7786300
الجزائر	الجزائر	دار ابن باديس	645900	البحرين	المنامة	مؤسسة الايام	725111
الجزائر	وهران	دار العزة والكرامة	41540793	البحرين	المنامة	مكتبة فخراوي	591118
الجزائر	فلسطين	دار اليمن	961869	فرنسا	باريس	معهد العالم العربي	140513809
الجزائر	فلسطين	انفودك	770906434	المغرب	أغادير	مكتبة وراقه	
الجزائر	الجزائر	دار البصائر	495735	المغرب	البيضاء	المركز الثقافي	
الجزائر	الجزائر	مكتبة الأصالة	243602	سلطنة عمان	رومي	مكتبة القرآن	
الجزائر	الجزائر	دار الهدى	021966220	الملكة المتحدة	لندن	مكتبة السد	
مصر	مدينة نصر	دار الشروق	4023399	أمريكا	لوس أنجلوس	مكتبة جرير	
مصر	القاهرة	مكتبة مدبولي	5756421	اليمن	صنعاء	الدار العلم	
مصر	القاهرة	دار الفجر	6246252	اليمن	صنعاء	دار العلوم	
مصر	القاهرة	الهيئة المصرية العامة	25775371	اليمن	صنعاء	دار الكلمة	
مصر	القاهرة	مجموعة النيل العربية	2026717135	اليمن	صنعاء	دار الكتاب	
مصر	القاهرة	الشركة العربية المتحدة	22705844				

Bibliotheca Alexandrina



1241747



9 789957 126230



للحصول على نسخة إلكترونية
www.jordanebook.com

اليازوري
دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع

عمان - وسط البلد - شارع الملك حسين
هاتف: +962 6 4626626 - فاكس: +962 6 4614185
ص. ب. 520646 الرمز البريدي: 11152
info@yazori.com www.yazori.com